Adrien-Marie Legendre, né le 18 septembre 1752 à Paris

Sa famille est aisée ;Il fut un élève brillant du lycée Mazarin

Il devient professeur de Mathématiques de l'école militaire de Paris de 1775 à 1780.

Le 30 mars 1783, il devient membre de l'académie des sciences..

1784 Recherches sur la figure des planètes, dans mémoires de l'académie des sciences ,Paris
Il y définit les polynômes dit maintenant de Legendre

Sa définition est par le développement en série entière

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Il trouve aussi l'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Et aussi que P_n est solution de l'équation différentielle dite de Legendre :

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$$

P_n est la seule solution définie au voisinage de 0 qui est continue jusque 1 avec y(1)=1.

L'autre solution est $P_n(x)\ \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

Par contre on doit la formule

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

à Rodrigues (1795- 1851) en 1816.La découverte de Rodrigues est passée inaperçue, et redécouverte par Jacobi (1827 dans le journal de Crelle), sa paternité lui fut restituée par Hermite en 1860

Formule de récurrence : $(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0.$

Formule intégrale de Laplace

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \, \mathrm{d}\varphi$$

Les coefficients :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!\; x^{n-2k}}{(n-k)!\;(n-2k)!\;k!\;2^n}$$

En 1785, il conjecture à nouveau la loi de réciprocité quadratique qu'il ne parvient pas plus à démontrer que son prédécesseur Euler qui l'avait vu aussi ;c'est Gauss qui la démontrera.

Il est d'accord avec la révolution mais, il doit pendant la terreur se cacher à Paris

1792 π^2 *irrationnel Éléments de géométrie* : Note IV page de 289

il donne un développement en fraction continue de tg(x) d'où il déduit le résultat

Il fait la connaissance de Marguerite-Claudine Couhin , qu'il épouse en **1793.**

Ils n'auront pas d'enfants.

1794 Eléments de géométrie qui a un grand succès même aux états unis

Il y eut 15 éditions de son vivant (la 1re édition date de 1794, la 12e de 1823)

August Crelle le traduisit en 1822 en allemand : *Die Elemente der Geometrie*, Berlin, 1822 (puis 1858).

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z

1795 il est élu à l'académie des sciences

1798 son livre sur la théorie des nombres

Le theoreme des 4 carrés est chez Diophante traduit par Bachet en 1621.

Démontré par Lagrange en 1770 ;Legendre améliora le théorème en découvrant que le nombres pas somme de 3 carrés sont ceux de la forme 4^n (8m+7) ,rigoureusement démontré par Gauss.

En 1834 Jacobi trouva une formule donnant le nombre de solutions, grâce aux fonctions elliptiques .

En 1797-98 il conjecture le théorème des nombres premiers dans son ouvrage de théorie des nombres (Gauss avait également fait cette conjecture dès 1792) ; cela fut rigoureusement prouvée par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896.

1805 méthode des moindres carrés ; déjà trouvé par Gauss

1808 deuxième édition de sa théorie des nombres améliorée tenant comptes des résultats de Gauss

http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-42610

http://books.google.fr/books?id=poNBAAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

1809 : Notation de la fonction gamma (et beta introduit par Euler en 1729-1730)

(pour la fonction béta c'est la notation de Binet en 1839 journal ecole polytechnique p131

1809 : formule de duplication

$$2\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, année 1809, p. 485. Binet a donné de cette formule une démonstration directe différente de celle qui précède (Journal de l'École royale polytechnique, 27e cahier, t. XVI, 1839, p. 209–
210).

Formule Généralisée par Gauss

1811 exercices de calcul intégral en 3 volumes sur les fonctions eulériennes et elliptiques

Livre étudié par Abel qui en ayant l'idée d'inverser les intégrales elliptiques,de même que sin est plus utile que arcsin(x)= $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, révolutionna la théorie ; Jacobi fut aussi le grand spécialiste des fonctions elliptiques

1825 Traité sur les fonctions elliptiques

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110147r

En 1825, il finalisa la preuve du dernier théorème de Fermat pour l'exposant $n = 5$ (voir démonstrations du dernier théorème de Fermat), à la suite des travaux de Dirichlet.

Il meurt le 9 janvier 1833 , après une longue maladie.Sa femme cultiva sa mémoire en préservant toutes ses affaires.Elle est morte en 1856 ;Ils sont enterrés à Auteuil.

Un grand mathématicien mais qui n'est pas aller au bout des théories qu'il avait étudiées.

Abel , Jacobi ,Gauss dépassèrent Legendre

C'est Poisson qui fit son éloge funéraire on peut trouver son discours dans le Journal de Crelle band 10 1933

Journal für die reine und angewandte mathematik (*Journal de mathématiques pures et appliquées*), encore publié de nos jours

Digitalisé à l'université de Göttingen où gauss étudia et fut directeur de l'observatoire d'astronomie

http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0010

Eloge de Legendre de 1861

http://www.academie-sciences.fr/activite/archive/dossiers/eloges/legendre_vol3246.pdf

Polynomes de Legendre :

$$R = (r^2 - 2rz \cos. \mu + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{R}=\frac{d\theta}{r}\left(1+\frac{z}{r}Y'+\frac{z^2}{r^2}Y''+\frac{z^3}{r^3}Y'''+\text{etc.}\right)$$

expression où les quantités Y', Y'', Y''', etc. sont des fonctions rationnelles de cos. μ. Voici leurs valeurs et la loi qu'elles suivent : on a fait pour abréger cos. $\mu = y$; *(a)*

$$Y^{\text{I}}=y$$

$$Y^{\text{II}}=\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}$$

$$Y^{\text{III}}=\frac{5}{2}y^3-\frac{3}{2}y$$

$$Y^{\text{IV}}=\frac{5.7}{2.4}y^4-\frac{3.5}{2.4}2y^2+\frac{1.3}{2.4}$$

$$Y^{\text{V}}=\frac{7.9}{2.4}y^5-\frac{5.7}{2.4}2y^3+\frac{3.5}{2.4}y$$

$$Y^{\text{VI}}=\frac{7.9.11}{2.4.6}y^6-\frac{5.7.9}{2.4.6}3y^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}3y^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}$$

$$Y^{\text{VII}}=\frac{9.11.13}{2.4.6}y^7-\frac{7.9.11}{2.4.6}3y^5+\frac{5.7.9}{2.4.6}3y^3-\frac{3.5.7}{2.4.6}y,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(r^2-2rzy+z^2)}}=\frac{1}{r}+\frac{z}{r^2}Y'+\frac{z^2}{r^3}Y''+\frac{z^3}{r^4}Y'''+\text{etc.}$$

L'expression générale de Y^m se trouvera donc en cherchant le coëfficient de z^m dans le développement de $(1-2zy+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou dans la suite $1+\frac{1}{2}(2zy-z^2)+\frac{1.3}{2.4}(2zy-z^2)^2+\text{etc.}$ Or les termes qui renferment z^m sont, à commencer de la plus haute puissance

$$\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m}(2zy-z^2)^m+\frac{1.3\ldots 2m-3}{2.4\ldots 2m-2}(2zy-z^2)^{m-1}+\text{etc.}$$

De-là il est facile de conclure

$$Y^m = \frac{1.3.5.\ldots 2m-1}{1.2.3.\ldots\ldots m} y^m - \frac{1.3.\ldots 2m-3}{1.2.\ldots m-2} \cdot \frac{y^{m-2}}{2} + \frac{1.3.\ldots 2m-5}{1.2.\ldots m-4} \frac{y^{m-4}}{2.4} - \text{etc.}$$

Cela posé, si on appelle T la quantité $(r^2 - 2rz\gamma + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, et qu'on fasse à l'ordinaire cos. $\psi = x$, on trouvera que T satisfait à cette équation aux différences partielles

$$\frac{d.(1-xx)dT}{dx^2} + \frac{1}{1-xx} \cdot \frac{ddT}{d\varphi^2} + r\frac{dd.\,rT}{dr^2} = 0;$$

c'est ce qu'on peut vérifier par la différentiation. Si à présent on met dans cette équation, à la place de T, sa valeur développée $\frac{1}{r} + \frac{z}{r^2} Y' + \frac{z^2}{r^3} Y'' + \text{etc.}$ on verra aisément que chacun des coëfficiens Y', Y'', etc. est assujetti à une condition particulière, et qu'on a en général

$$\frac{d.(1-xx)d.Y^m}{dx^2} + \frac{1}{1-xx} \cdot \frac{ddY^m}{d\varphi^2} + m(m+1)Y^m = 0\ldots(1)$$

(11) Pour effectuer ces intégrations, nous allons démontrer qu'en général μ et ν étant différens, l'intégrale $\int X^\mu X^\nu dx$, prise depuis $x = -1$, jusqu'à $x = +1$, est nulle, et que dans le cas de $\mu = \nu$, on a

$$\int X^\mu . X^\mu dx = \frac{2}{2\mu + 1}.$$

En effet, si on remonte à l'origine des fonctions X^{I}, X^{II}, etc. (nº 4), on pourra supposer

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2rzx + r^2z^2)}} = 1 + zrX' + z^2r^2X'' + z^3r^3X''' + \text{etc.}$$