Euclide  d'Alexandrie ( ?325, ?265 av JC)

On ne sait pas grands choses d'Euclide, ,il étudia dans l'académie de Platon à Athènes , et il enseigna à Alexandrie sous Ptolémé 1$^{er}$ .

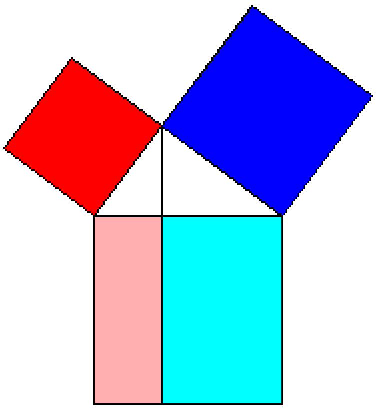
Les Elements d'Euclide sont composé de 13 livres ; chaque démonstration se terminant par  CQFD

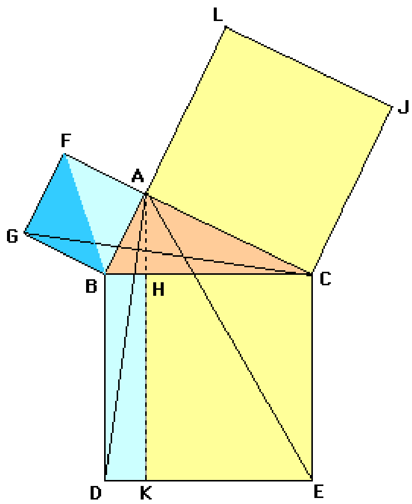
Il y a des problèmes de constructions à la règle et au compas

Le premier livre commence par 23  définitions , 5 postulats ,5  axiomes et contient 48  propositions

La 47 étant le théorème de Pythagore :

si $(AB) \perp (AC)$ alors    $AB^2+AC^2 = BC^2$






la proposition 48 est la réciproque

C'est le livre  qui a formé les européens à a géométrie pendant 2000 ans ; le livre le plus édité après la bible.La première publication imprimée date de 1482 à Venise (la bible en 1455 par Gutemberg).Depuis un millier d'eddítions dont celle en couleur d'Oliver Byrne de 1847

En découvrant à 12 ans les éléments d' Euclide , Einstein fut impressioné par la clarté et la rigueur, l'architecture logique des éléments .Et qualifia ce livre de sacré et ce fut un grand évènement dans sa vie.

On pourra trouver les éléments   :    jfgilles.perso.sfr.fr/mathematiques/bibliotheque/**euclide**

**Un autre site**

**[http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/geometrieintro.htm](http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/geometrieintro.htm)**

**[http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/geometrie1.htm](http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/geometrie1.htm)**

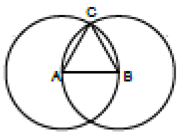
En couleur et en anglais voir Oliver Byrne edition de 1847

Voir aussi

http://euclides.fr/bibliotheque/euclide/index.html

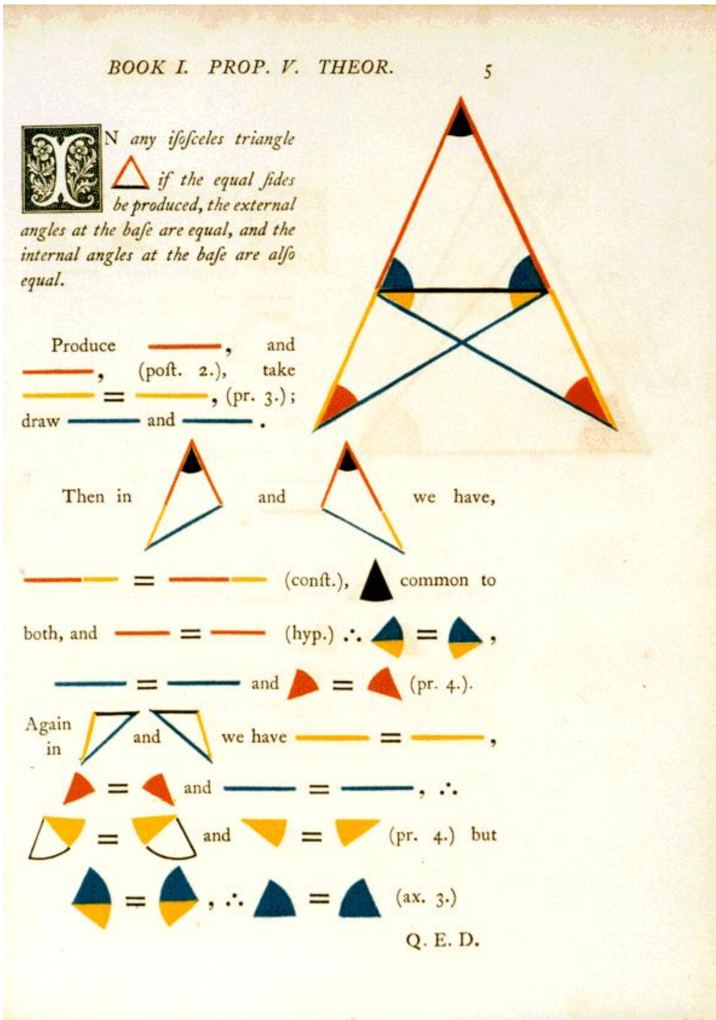
**Livre 1** : 48 prépositions sur les triangles ,parallélogramme ,

Proposition 1 construire un triangle équilatéral de côté donné




Proposition 4 : 2 triangles ayant 2 côté egaux et un angle correspondant sont égaux

proposition 5 sur les angles d'un triangle isocèle



*BOOK I. PROP. V. THEOR.* 5

IN *any iſoſceles triangle* *if the equal ſides be produced, the external angles at the baſe are equal, and the internal angles at the baſe are alſo equal.*

Produce , and , (poſt. 2.), and take = , (pr. 3.); draw and .

Then in and we have,

= (conſt.), common to both, and = (hyp.) ∴ = ,

= and = (pr. 4.).

Again in and we have = ,

= and = , ∴

= and = (pr. 4.) but

= , ∴ = (ax. 3.)

Q. E. D.

Oliver Byrne  1847

Proposition 10 : construire la médiatrice d’un segment en utilisant la prop 1

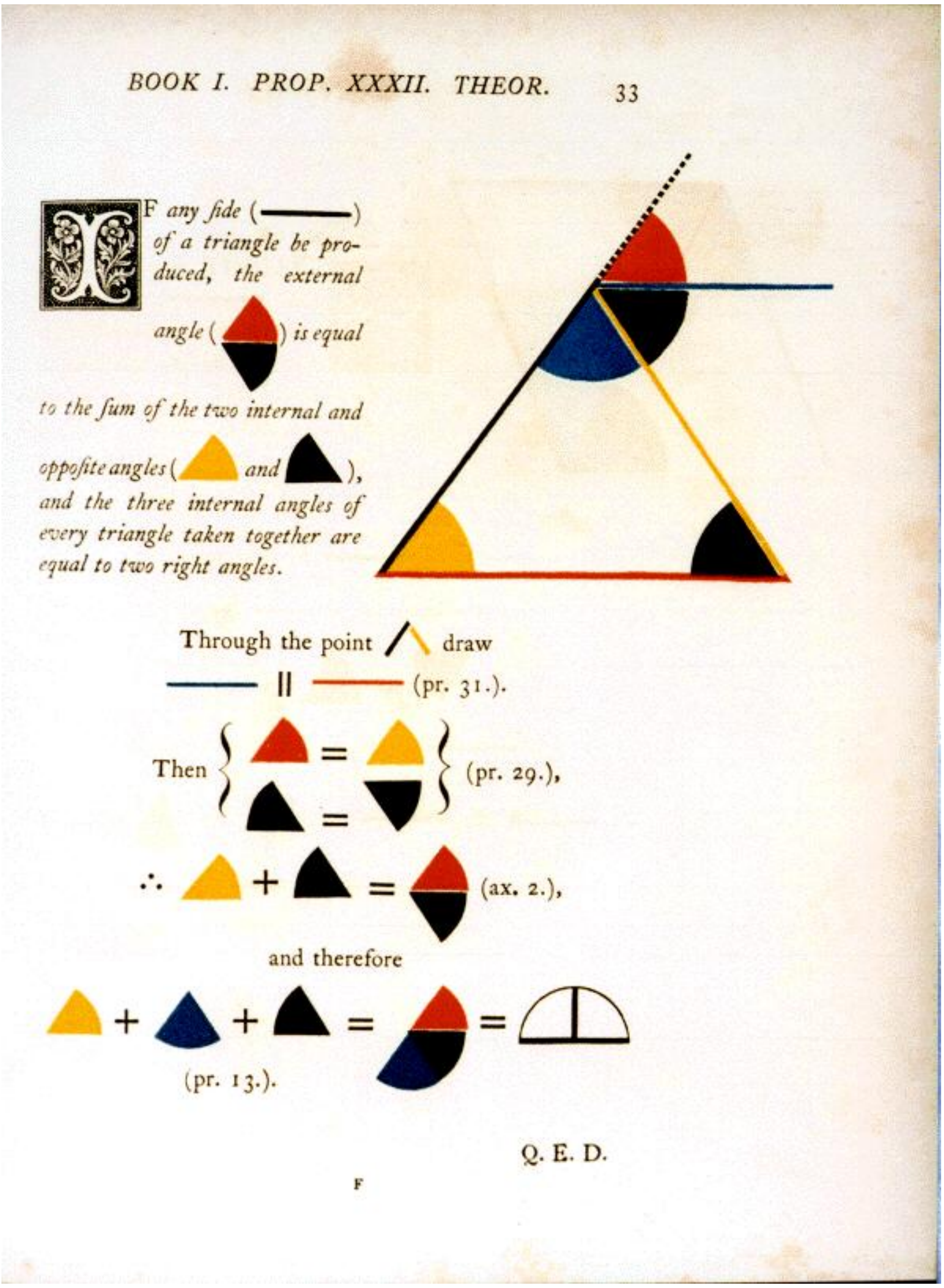
Proposition 18 : le grand coté d’un triangle est opposé au grand angle

Proposition 20 : inégalité triangulaire AB+BC > AC

Proposition 26 :deux triangles ayant un coté respectif egal et 2 angles sont égaux

Proposition  31 : construire une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné

proposition 32  sommes des angles d’un triangle



BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

IF any ſide ( ) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles ( and ), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw || (pr. 31.).

Then { = , = } (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

+ + = = (pr. 13.).

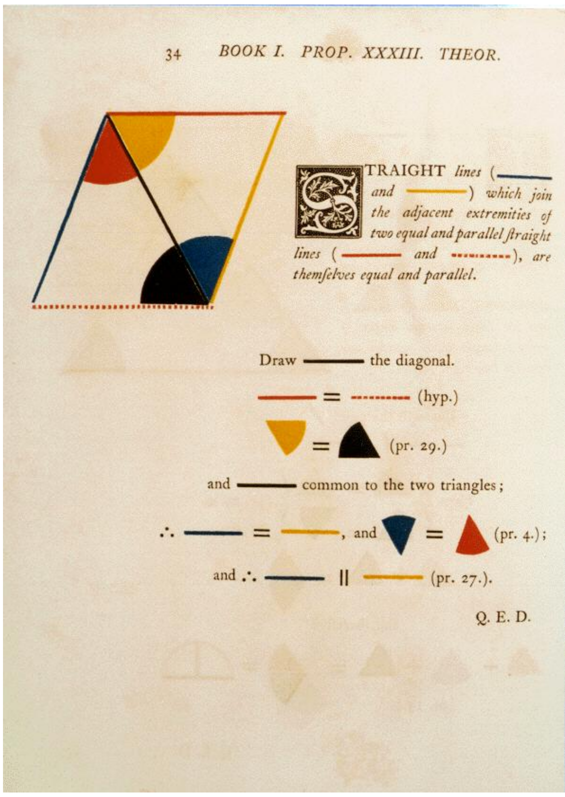
Q. E. D.

F

Oliver Byrne 1847

Sur les parallélogrammes :

Proposition 33 si AB=CD et sont parallèles dans le même sens alors (AC) // (BD) et AC=BD



34 BOOK I. PROP. XXXIII. THEOR.

STRAIGHT lines ( and ) which join the adjacent extremities of two equal and parallel straight lines ( and ), are themselves equal and parallel.

Draw the diagonal.

= (hyp.)

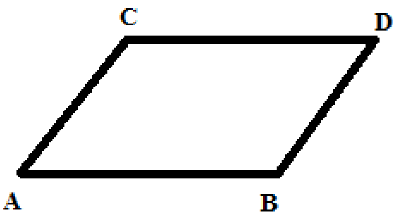
= (pr. 29.)

and common to the two triangles;

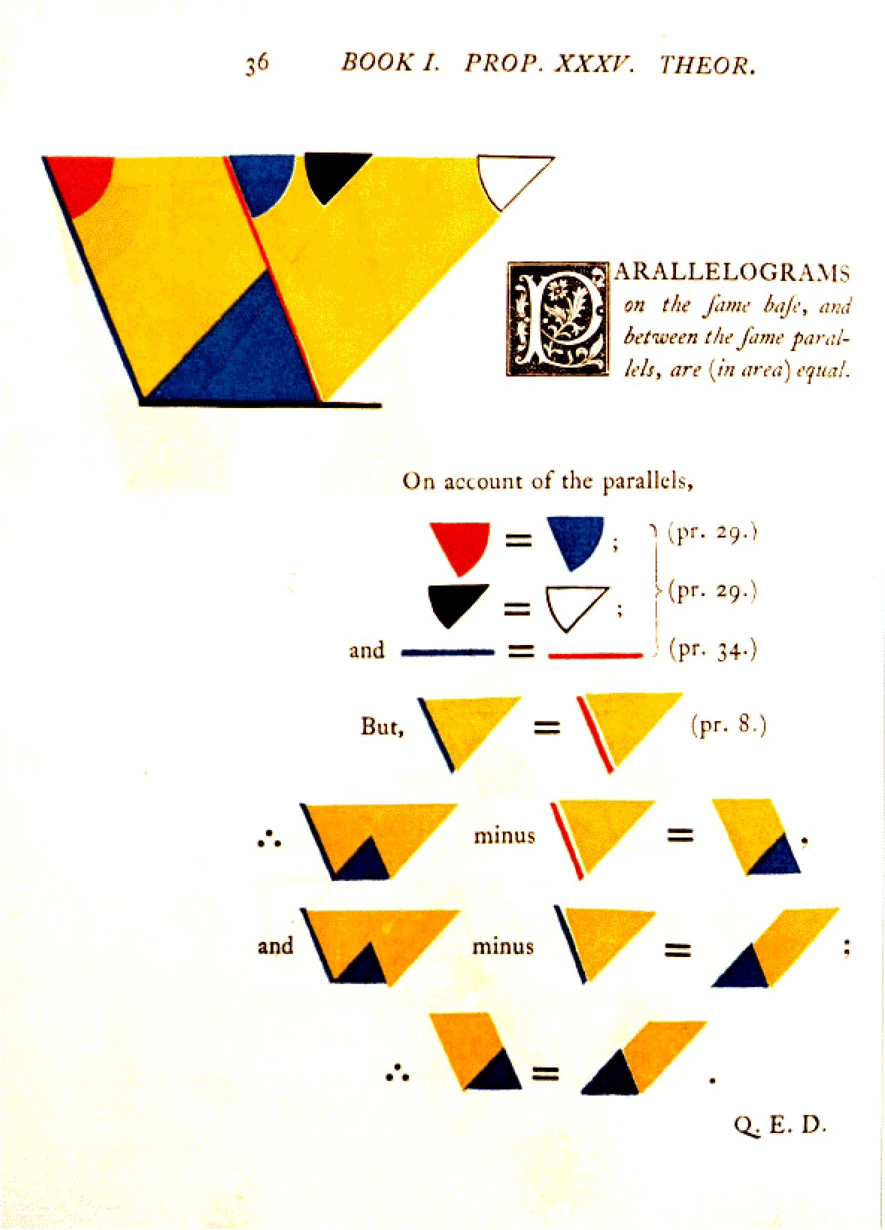
∴ = , and = (pr. 4.);

and ∴ ∥ (pr. 27.).

Q. E. D.




Puisque la droite AB est parallèle à la droite CD et que la droite BC tombe sur ces deux droites, les angles alternes ABC, BCD sont égaux (prop. 29). De plus, puisque la droite AB est égale à la droite CD et que la droite BC est commune aux deux triangles BCA, BDC, les deux droites AB, BC sont égales aux deux droites CD, BC; mais l'angle ABC est égal à l'angle BCD : donc la base AC est égale à la base BD, le triangle ABC est égal au triangle BCD, et les autres angles qui sont opposés à des côtés égaux sont égaux, chacun à chacun : donc l'angle ACB est égal à l'angle CBD. Donc puisque la ligne droite BC tombant sur deux droites AC, BD fait les angles alternes égaux entre eux, la droite AC est parallèle à la droite BD et lui est égale (prop. 27).


36 BOOK I. PROP. XXXV. THEOR.

PARALLELOGRAMS on the ſame baſe, and between the ſame parallels, are (in area) equal.

On account of the parallels,

= ; (pr. 29.)

= ; (pr. 29.)

and = (pr. 34.)

But, = (pr. 8.)

∴ minus = ,

and minus = ;

∴ = .

Q. E. D.

Proposition 37 : triangle de même base entre 2 parallèles ont la même aire

Proposition 41 : Si un parallélogramme et un triangle ont la même: base et sont compris entre les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

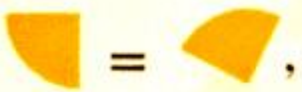
Proposition 47 théorème dit de Pythagore

IN *a right angled triangle*

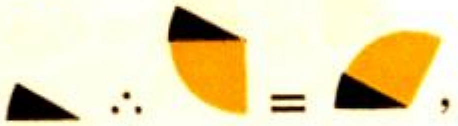
*the square on the hypotenuse* *is equal to the sum of the squares of the sides*, ( *and* ).

On , and describe squares, (pr. 46.)

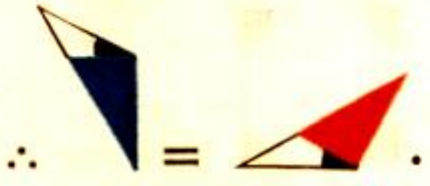
Draw || (pr. 31.)
also draw and .



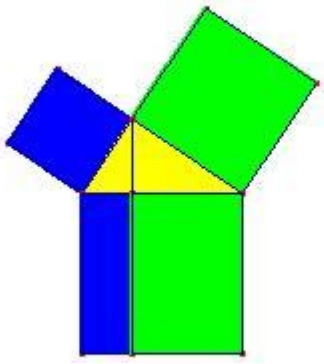
To each add ∴



= and = ;

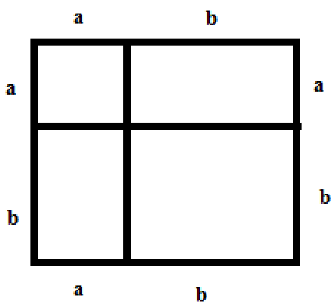


Again, because ||



**Livre 2** : 14 prépositions , proposition 1 correspond à : a(b+c)=ab+ac

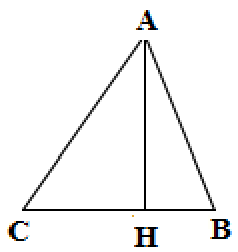
proposition 4 : $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$




proposition 5 $a^2-b^2 =(a-b)(a+b)$

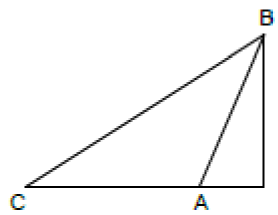
on pourra aussi voir “proof without words “ de Roger Nelsen

proposition 12 et 13 généralisation de Pythagore (formule de EL Kaschi )




$$AC^2 + 2\,CB\,BH = AB^2+CB^2$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$$

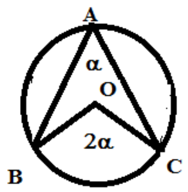


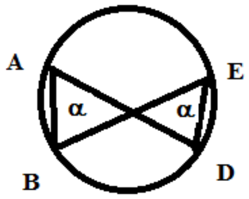

**Livre 3** : cercles , cordes, tangentes

Proposition 1 : Trouver le centre d’un cercle

Proposition 17 : Tracer par un point la tangente à un cercle

Proposition 20    l'angle au centre est le double de l'angle au sommet




Proposition 21 : A ,B,D,E cocycliques alors les angles  BAD, BED sont égaux

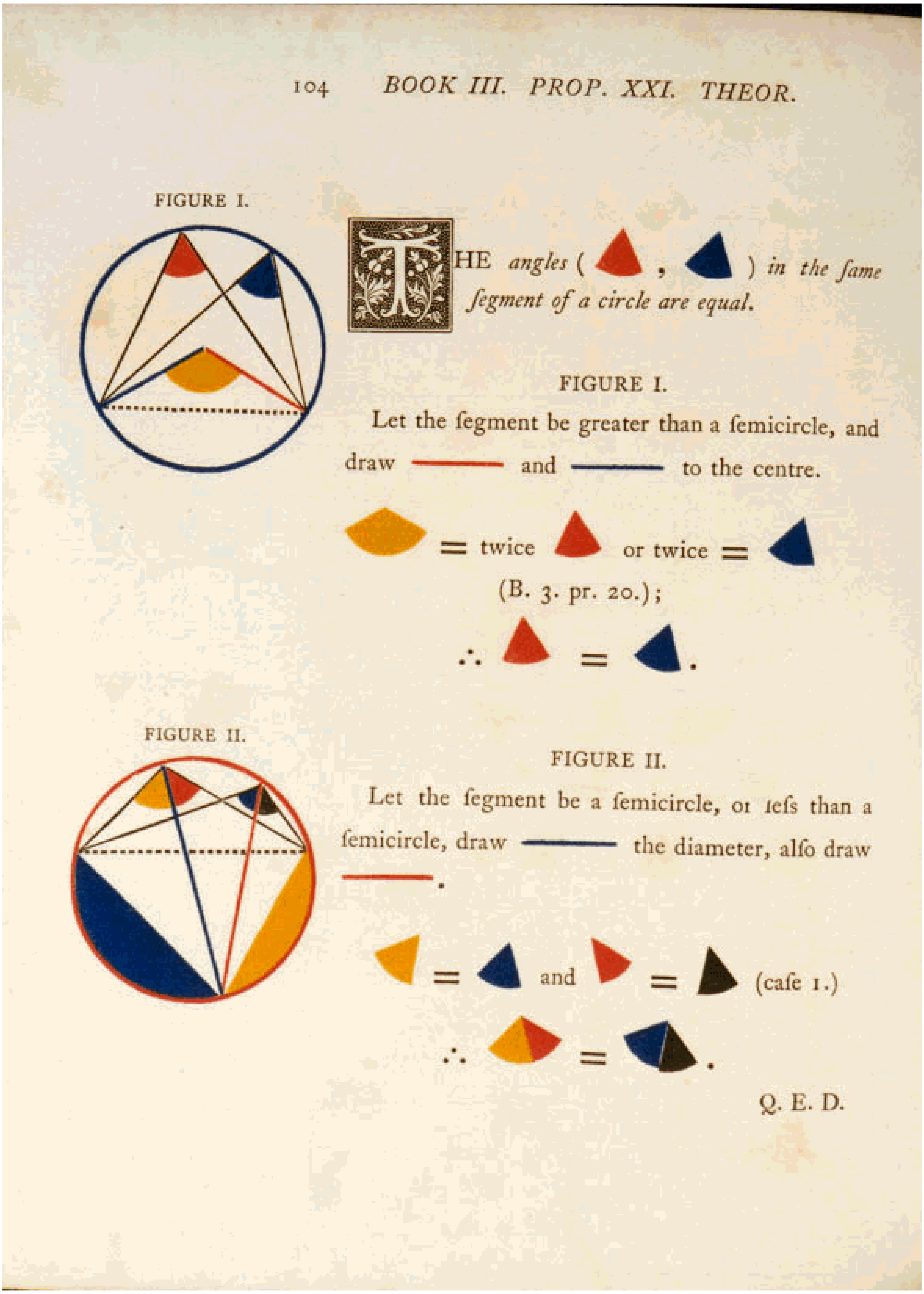

104 BOOK III. PROP. XXI. THEOR.

FIGURE I.

THE *angles* ( , ) *in the ſame ſegment of a circle are equal.*

FIGURE I.

Let the ſegment be greater than a ſemicircle, and draw and to the centre.

= twice or twice =

(B. 3. pr. 20.);

∴ = .

FIGURE II.

FIGURE II.

Let the ſegment be a ſemicircle, or leſs than a ſemicircle, draw the diameter, alſo draw .

= and = (caſe 1.)

∴ = .

Q. E. D.

**Livre 4**: polygones, inscrits et circonscrits au cercle

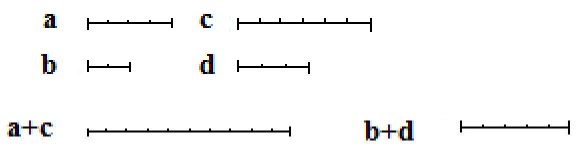
Proposition 4 : tracer le cercle inscrit à un triangle

Proposition 5 : tracer le cercle circonscrit à un triangle (les médiatrices concourent)

Proposition 11 construire un pentagone

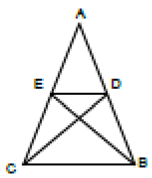
**Livre 5** :des proportions ;

proposition 1  a /b=c /d $\Rightarrow$ (a+c)/(b+d)=a/b




prop 16 : a /b=c/d $\Leftrightarrow$ a /c=b/d

**Livre 6** : proposition 2 : théorème dit en France de Thalès




**DE // BC ssi  BD /DA =EC/EA**

figures semblables ;

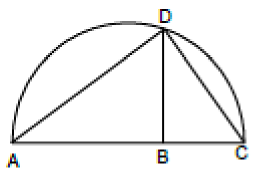
proposition 12 construire d  tel que d /a = b /c

proposition 13 construire c tel que $c^2$ =ab  (moyenne geométrique)

**a= AB  b=BC**

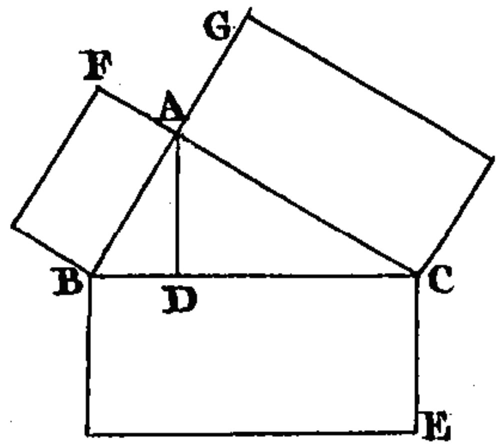
**BD=c hauteur du triangle**

**ADC  rectangle en D**




proposition 31   généralisation de Pythagore :

***Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui sous-tend l'angle droit est égale aux figures semblables qui sont décrites semblablement sur les côtés qui comprennent l'angle droit.***




**Livre 7** proposition 11 a/b=c /d donne a/b= (a-c )/b-d)

proposition 12 a/b=c /d donne a/b= (a+c )/b+d)

Proposition 13 a/b=c /d donne a /c=b/d

Proposition 24 a, b premier avec c alors ab premier avec c

Proposition 27 a, b premier alors $a^2$ , $b^2$ premiers ente eux et $a^3$, $b^3$ …

**Livre 8** propriétés arithmétiques

Proposition 14 si $a^2$ divise $b^2$ alors a divise b

**Livre 9**: arithmétiques : proposition 20 : il y aune infinité de nombres premiers

Sinon soient $p_1,\dots , p_n$ les nombres premiers , on considère $N=p_1p_2\dots p_n + 1$

Il existe un nombre premier p qui divise N et p n'est pas un $p_i$ sinon $p_i$ divise 1

Proposition 35 : calcul de $a+ ar + ar^2+. ..+ar^{n-1} =a (r^n -1)/ (r-1)$

Donné verbalement sous la forme $(ar-a)/a =(ar^n – a) /S$

La démonstration utilisant les propositions 11,12 ,13 du livre 7

Proposition 36 : si $2^n$-1 est premier alors $2^{n-1} (2^n-1)$ est parfait

**Livre 10** : sur les racines carrées

**Livre 11** : plan et droite dans l' espace

Proposition 2 :  deux droites concourantes sont coplanaires

Proposition 11 : construire la normale à un plan

**Livre 12**  aires , volumes ,sphères , pyramide, cônes ,cylindres

Proposition 1 : les côtés de polygones inscrits dans deux cercles sont comme le carré des rayons des cercles

Proposition 2 : les aires de deux cercles sont comme le carre des rayons

(livre attribué à **Eudoxe** entre – 400 et -350 )

Eudoxe fut le premier à calculer la durée de rotation de l'année terrienne. Il l'évalua à 365 jours 1/4.

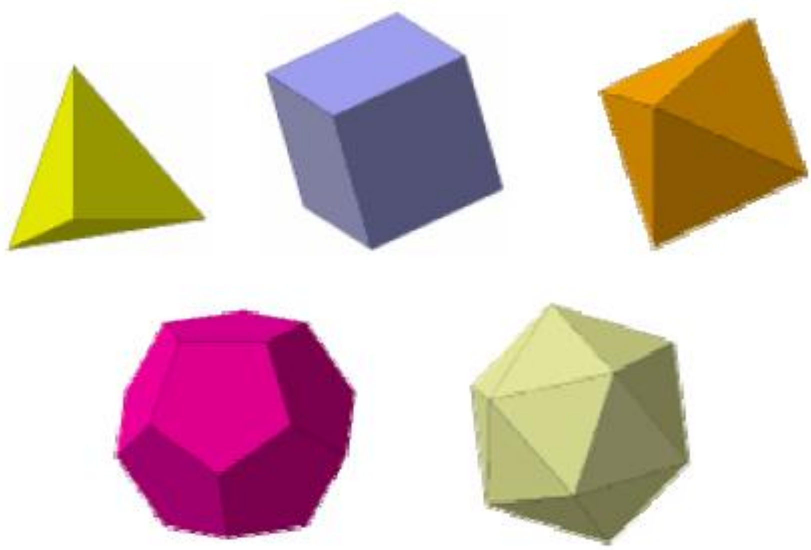
On lui doit la démonstration de l’aire des cercles, pyramides , cones

**Livre 13**    polyèdres réguliers

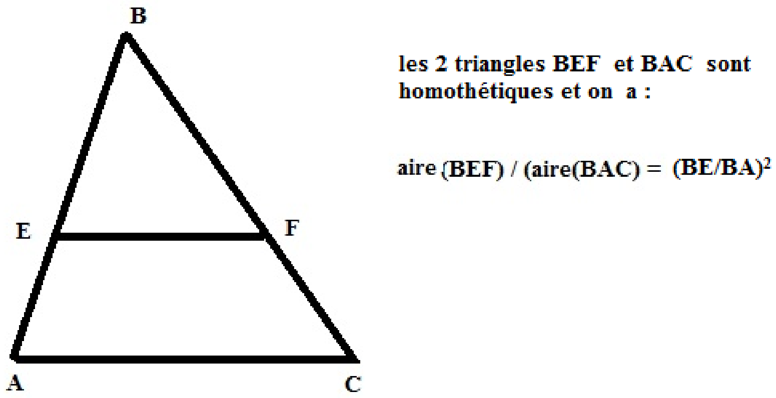
Prop 13  le diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre régulier de coté a vérifie  $d^2=3a^2/2$

Prop 15 pour le cube $d^2=3a^2$

A la fin du livre on montre qu’ il n’ y a que 5 polyèdres réguliers

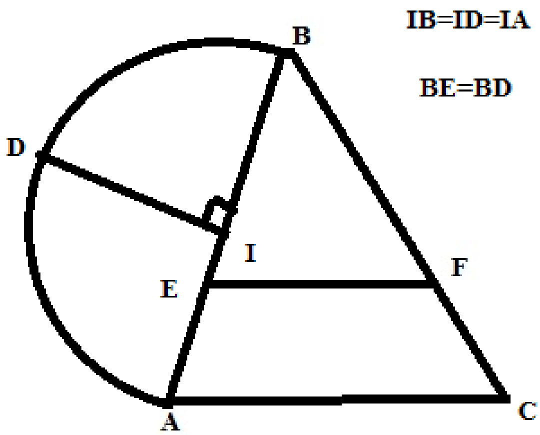


On doit aussi à Euclide un traité sur les coniques formé de 4 livres , qu'**Apollonius** (-262 – 200) complètera en 4 autres , total 8 qui contiennent 400 propositions.On lui doit aussi un traité « sur la division des figures » de 36 propositions: par exemple comment diviser un triangle par une droite parallèle à un coté donné , en 2 parties de même aire. Ce livre a été conservé en arabe.




On doit donc construire F tel que BE/ BA =1/ $\sqrt{2}$ Voici une solution du centre I de [AB] on trace le cercle de centre I de rayon IA

Puis le point D sur la médiatrice IA=ID ;on trace E tel que AE=AD

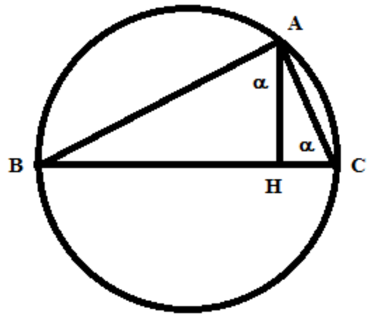



<u>Exercice</u> : diviser en deux parties de même aire un triangle par une perpendiculaire à un côté

Pour construire $\sqrt{ab}$ on peut utiliser que si ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur

Issue de A on a $AH^2$=BH HC (tg( $\alpha$) = BH/AH =HA/HC )

et $AC^2$ = CH CB ( cos($\alpha$)= HC/AC=AC/BC

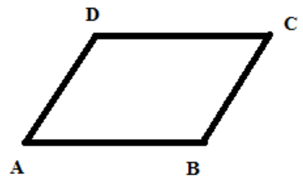


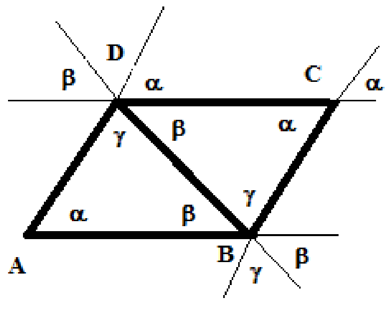

cf  proposition 13 du livre 6

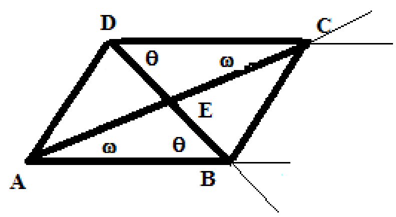
exercice : diviser un triangle en 2 par un une droite passant par un point donné qui est sur le périmètre (si c'est un sommet il suffit de prendre le pied de la médiane)

**Sur le parallélogramme :**

Définition (ABCD) parallélogramme lorsque (AB) //( DC) et (AD)//(BC)




Propriété 1 : les  triangles ADB  et DBC ont des angles egaux et un côté commun donc sont les mêmes et donc  AB=DC

Propriété 2 : Les diagonales se coupent en leur milieu

Si E est l'intersection des diagonales , les triangles  ABE et CDE sont les mêmes car mêmes angles et même  côté DC=AB  d'où AE=EC et DE=EB

<u>Propriété 3</u>  si (AB)//(CD)  et AB= CD alors  (ABCD) parallélogramme

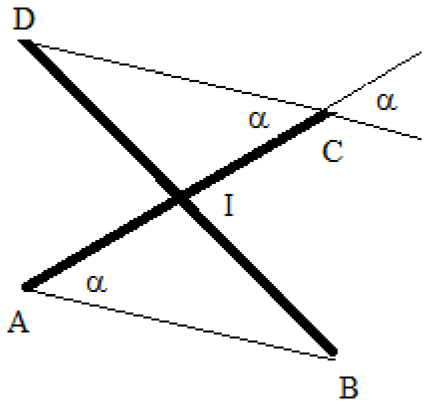
Les triangles ADB  et DBC ont 2 côtés égaux et un angle donc ce sont les mêmes d'où l'angle

$B\hat{A}D = D\hat{C}B$ et donc (AD) // (BC)

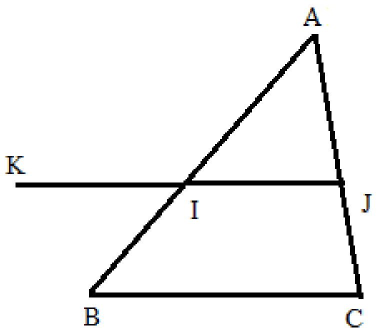
<u>Propriété 4</u> :  si [AC] et [DB] se coupent en leur milieu alors (ABCD) parallélogramme

Les triangles AIB  et DIC sont les mêmes car même angle au sommet et BI=ID , IC=IA

D'où DC=AB et  $B\hat{A}I = D\hat{C}I$  d'où (DC)// (AB)  et DC=AB et donc (ABCD) parallélogramme




<u>Application : droite des milieux</u>




a)Si I milieu de [AB] et (IJ)// BC alors J milieu de [AC]

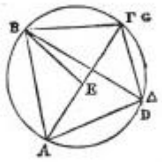
On introduit K le symétrique de J par rapport à I , alors AKBJ est un parallélogramme car les médianes se coupent au milieu ; d'où AJ=KB et (AJ)//(KB) d'où KBCJ parallélogramme d'où JC=KB ainsi JC=AJ

b)Si I,J milieux alors (IJ)//(BC)

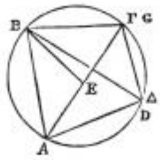
(KBJA) parallélogramme d'où KB=AJ et (KB)//(AJ) //(JC) et JC=AJ=KB ainsi KJCB parallélogramme et donc (KJ) // (BC) soit (IJ) // (BC)

**Ptolémé** (90-198 ap JC) est un astronome qui continua l'œuvre d Hipparque qui pour mesurer les angle mesurait la corde.c'est que continua de faire Ptolémé ; les sinus (demi corde ne viendront que plus tard par Aryabhata d' Hinde puis les arabes puis Regiomontanus (1439-1476) œuvre publié en 1533 ; le mot trigonométrie date de 1595

C'est pour construire une table de demi degré en demi degré qu'il utilisa son théorème dans son grand livre Algameste




Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD ; soient menées les diagonales AG, BD : il s'agit de prouver que le rectangle, construit sur AG et BD, est égal aux deux rectangles des côtés opposés AB GD, et AD BG. Soit fait l'angle ABE égal à l'angle DBG ; si nous ajoutons à chacun l'angle commun EBD, l'angle ABD égalera l'angle EBG. Mais BDA est égal à BGE ; car ces deux angles sont inscrits et appuyés sur le même arc ; donc le triangle ABD est équiangle au triangle BGE. On a donc l'analogie : BG est à GE, comme BD est à DA : par conséquent, le produit de BG multiplié par AD est égal à celui de BD multiplié par GE. Maintenant puisque l'angle ABE est égal à l'angle DBG, et que l'angle BAE est égal à l'angle BDG, le triangle ABE est équiangle au triangle BGD ; on a donc l'analogie : BD est à DG, comme BA est à AE ; donc le rectangle BA DG est égal au rectangle BD AE. Or il a été prouvé que le rectangle BG AD est égal au rectangle BD GE ; par conséquent (g) le rectangle entier AG BD, est égal aux deux rectangles AB DG, et AD BG. Ce qu'il falloit démontrer.




**Almageste**

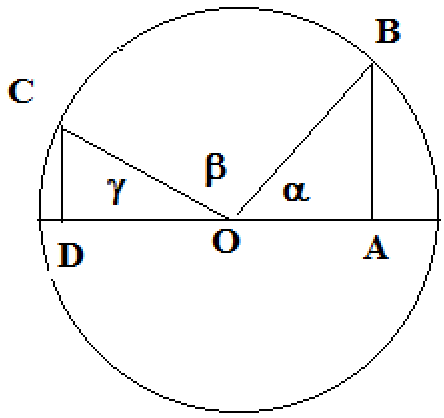
**livre I paragraphe 9 p 30**

**cela permet à Ptolémé de faire une table des cordes de demi degré en demi degré**

Ce résultat revient à justifier sin(a+b)=sin(a)cos(b)+cos(a)sin(a)

Comme on le voit en utilisant une démonstration avec les complexes dans le cercle unité

Voiçi une démonstration de sin(a+b) utilisant l’aire du trapèze




**cercle de centre O de rayon 1**
**l'aire du trapèze ABCD**
**est** $(\cos(\alpha)+\cos(\gamma))(\sin(\alpha)+\sin(\gamma))/2$

**et aussi la somme des aires des 3 triangles**

$\frac{1}{2}\cos(\alpha)\sin(\alpha)+\frac{1}{2}1.1\sin(\beta)+\frac{1}{2}\cos(\gamma)\sin(\gamma)$

**or** $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ **on déduit**
$\sin(\alpha+\gamma)=\sin(\alpha)\cos(\gamma)+\sin(\gamma)\cos(\alpha)$

Comme grand géomètre Il faut enfin citer **Appolonius de Perge 260 -190 av JC** qui a écrit sur les coniques et **Pappus d’ Alexandrie** qui vécut vers 300 ap JC qui a trouvé des résultats et aussi transmit les oeuvres de ses collègues anciens ;il a écrit « les collections mathématiques » en 8 tomes.