Une histoire du raisonnement par récurrence :
On peut remonter jusqu'à l'italien Francisco Maurolico (1494-1575) qui a publié en **1575** Arithmeticorum libri duo où à la page 7, proposition 13, il note que tout carré avec l'impair suivant donne le carré suivant (soit $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ mais Mauricolo n'utilise que des mots) d'où la proposition 15 disant que la somme des impairs est le carré du nombre d'impairs (soit $1+3+...+(2n+1) = (n+1)^2$ non écrit ainsi par Maurolico) ainsi 1 et 3 sont 4, puis 4 et 5 font 9 et il dit qu'il faut toujours utiliser la proposition 13. En **1654** Pascal(1623-1662), mort donc à seulement 39 ans, dans son traité du triangle arithmétique écrit : "Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes. Le 1. qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base Le 2. que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. D'où il se voit, qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car, elle est dans la seconde base par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisième base,donc dans la quatrième, et à l' infini" ; Pascal ne nomme pas ce procédé. En **1656** Wallis [1](1616-1703) dans son Arithmetica infinitorum utilise le mot modum inductionis (p.15, p.31), sans faire de récurrence. Mais en **1686** dans Acta eruditorum p.360 Jacob Bernoulli fait un raisonnement par récurrence pour montrer 1+2+....+a=a(a+1)/2, même en latin on comprend bien qu'il passe de a à a+1. En **1736** Euler montre [2] par récurrence sur n, que pour p premier p divise $n^p - n$; il utilise que les combinaisons $\binom{p}{k}$ sont divisible par p pour k ente 1 et p-1.
Le mot récurrence est introduit par le français Moivre(1667-1754) émigré à Londres à la suite de la révocation de l'Edit de Nantes, en **1685** ; dans sa deuxième édition de son livre doctrine of chance en 1738 il introduit recurring serie p.193 (p.220 de l'édition de 1756), repris par Euler qui cite Moivre dans son Introductio en 1748, chapitre 13 : De seriebus recurrentibus, puis par Lagrange en 1775 séries récurrentes. Mais l'expression "raisonnement par récurrence" est du XIX siècle : en **1838** Augustus de Morgan(1806-1871) introduit mathématic induction dans un article de l' encylopédie Penny Cyclopedia disant que c'est un type usuel de raisonnement en mathématique qu'il propose d'appeler successive induction, il donne comme exemple $1 + 3 + 5 + .. + 2n + 1 = (n + 1)^2$, il signale qu'il faut parfois 2 cas ou plus, on peut avoir besoin de n-1 et de n, pour passer à n+1.
En **1888** Dedekind(1831-1916) dans son livre Was sind und was sollen die Zahlen ? parle de vollstandige Induktion. En 1894 Poincaré publie dans la Revue de métaphysique et de morale en 1894 p.371, un article sur le raisonnement mathématique repris en 1902 dans son livre La Science et l'Hypothèse : au chapitre 1 il écrit :" Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour n = 1 ; on montre ensuite que s'il est vrai pour n-1, il est vrai pour n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers....Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes....Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite. On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant. De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique. Si le théorème est vrai de n - 1, il l'est de n. On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures. Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes."
Appliquons cela à l'inégalité de Bernoulli : pour n=1 : $1 + x \geq 1 + x$; soit n un entier fixé si $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ alors $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) \geq 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x$ donc si la propriété est vraie pour un n elle le sera pour le suivant n+1 ; étant vraie pour 1 elle l'est pour 2 , puis pour 3, etc..

1. On lui doit le symbole pour infini ∞ que Wallis utilise dès le début de son livre sur les coniques, en 1655.
2. E54 publié en 1741.