Leibniz (1646-1716) calcula sans peine $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ mais ne réussit pas à calculer

S=$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .Jacques Bernouilli (1654-1705) ne réussit pas mieux .

Jean Bernoulli(1667-1748) , frère de Jacques , enseigna les mathématiques à Euler (1707-1783) dont le père avait eu comme professeur Jacques Bernouilli. Euler trouva de manière non rigoureuse la valeur de la somme S: partant du fait que si les racines de $P(x) = a_o + a_1 x + ... + a_m x^m$ sont $x_1 , x_2 , . . , x_m$ on a la formule $1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/ x_m = -a_1/a_o$.

Euler savait que $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et que $\sin(x) = (e^{ix}-e^{-ix})/2i = x - x^3/ 3! + x^5/5! -$.

dont les racines sont 0, $\pm\pi$,$\pm 2\pi$,.. Il déduisit ,comme les racines de $1- x/3! + x^2/5!-$ sont les $(n\pi)^2$, n entier , la somme des inverses est $- (-1)/ 3! = 1/6$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 / 6$

Voici deux démonstrations rigoureuses

1/a)Montrer que $\sin(2n+1)x = (\sin(x))^{2n+1} P_n(\text{cotg}^2 (x))$ avec

$P_n (X)=\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} X^{n-k}$

b)Déterminer les racines de P_n

c)Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \cot g^2 (\frac{k\pi}{2n+1})$ = n(2n-1)/3 puis déduire

$\sum_{k=1}^{n} 1/ \sin^2 (\frac{k\pi}{2n+1})$ = 2n(n+1)/3

d)En utilisant que pour $x \in [0;\pi/2[$ $\sin(x) \leq x \leq tg(x)$ déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 / 6$

2/a)Montrer en intégrant par parties que

$I_n = \int_o^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos (2 \pi n x) dx = 1/4\pi^2 n^2$

b)Montrer que $f(x) = \frac{1}{2} x(x-1) \text{cotg}(\pi x)$ est prolongeable en une fonction C^1 sur [0;1]

c)Montrer que pour g C^1 sur [0;1] on a $u_n= \int_o^1 g(x) \sin (2 \pi n x) dx \to 0$

d)Montrer que $\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2} \int_o^1 \frac{x(x-1)}{2} dx$ déduire le résultat

1/On doit à Leibniz (1682) la formule suivante : $\pi/4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (convergence lente)

Voici une démonstration:

En utilisant la série géométrique $1+(-x^2) + x^4 - x^6 + .. + (-x^2)^n$ montrer la formule suivante:

$$1-1/3+1/5-...+(-1)^n/(2n+1) = \int_o^1 \frac{dx}{1+x^2} + (-1)^n \int_o^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$$

Montrer que $\int_o^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx \to 0$ et déduire le résultat

Cette formule n'est pas bonne pour calculer π car la somme partielle converge trop lentement .On utilise la formule de John Machin trouvée en 1706 :

$\pi/4 = 4\mathrm{Arctg}(1/5) - \mathrm{Arctg}(1/239)$ et la série $\mathrm{Arctg}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

égalité valable pour $|x| < 1$ et qui se montre comme précedemment en intégrant entre 0 et x (si x>0) et non pas entre 0 et 1 .

On peut vérifier aussi que $\left|\mathrm{Arctg}(x) - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right| . \leq |x|^{2N+1} / 2N+1$

Pour vérifier la formule de Machin utiliser tg(a+b) et tg(2a) .

Machin en déduisit 100 décimales de π= 3,14 15 92 65 35 89 79 32 38....

C'est le premier a avoir calculé 100 décimales ; Viète en 1593 avant les intégrales avait 9 décimales de π ; en 1596 on en avait 20, Newton en calcula 15 en 1666

Archimède avait montré $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

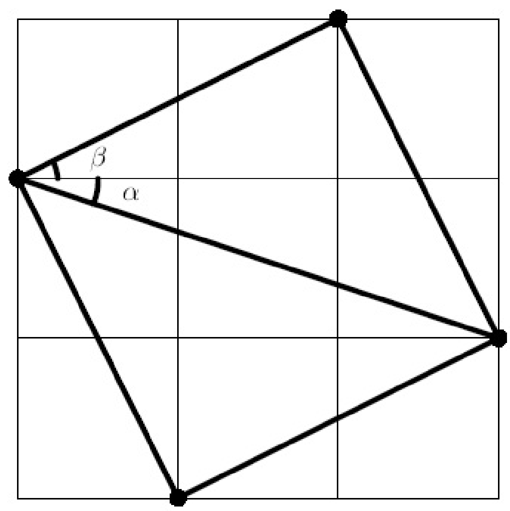
Aujourdhui 500 millards de décimales

La notation actuelle π a été adopté par Euler à partir de 1748 et à la fin du XVIII tout le monde l'utilise

Euler trouva en 1737 la formule suivante π/4 = Arctg(1/2)+Arctg(1/3)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

s'illustre très bien graphiquement sur du papier quadrillé:



Montrer que si m et n sont entiers positifs Arctg1/n +Arctg1/m = π/4 donne la seule solution 2,3 (on peut montrer que si x =a/b $\in$]0;1[est un rationnel tg(πx) rationnel donne x=1/4 il en résulte que Arctg1/n +Arctg1/m = πa/b a une seule solution en entiers)

Le grand Gauss (1777-1855) trouva la formule suivante
π/4 = 12 Arctg(1/18) +8 Arctg(1/57) - 5Arctg(1/239)

2/Montrer en utilisant la série géométrique $1-x+x^2+...+(-x)^n$ que

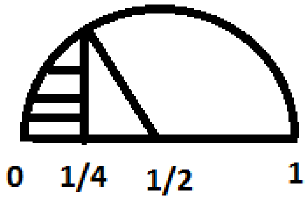
$\int_o^1 \frac{dx}{1+x}$ =Ln2 = 1-1/2+1/3-1/4+... = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ En utilisant cette formule

et celle de Leibniz montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+)(2n+2)} = \frac{\pi-3}{4}$

EULER (1707-1783)

LEIBNIZ (1646-1716)

Un résultat de Newton en 1666



$\int_0^{1/4} \sqrt{x-x^2}\, dx$ est l'aire entre le cercle de cercle (1/2,0) de rayon ½ et Ox

Cette aire est le secteur ($\frac{\pi}{6}(\frac{1}{2})^2$) moins le triangle soit $\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$

Le binome de newton donne $\sqrt{1-x} = \sum_0^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)..;(1/2-n+1)}{n!}(-x)^n$

On multiplie par $\sqrt{x}$ on intègre en permutant intégrale et somme infinie on a

$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \sum_0^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)(2n+3)\,2^{4n+2}}$ (avec cela il calcula 15 décimales)

Autre résultat :

a)Montrer que $\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{a}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{b}{x^2+x\sqrt{2}+1}$ où a et b sont des constantes

b)Calculer $\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

c)Simplifier $\frac{1}{1+x^4}-(1-x^4+x^8-...+(-1)^n x^{4n})$

d)Montrer que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4}dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

e)Montrer $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=\lim\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{4k+1}+\frac{1}{4k+3}\right)$ (convergence lente)

une Autre

Arcsin(x) = $\sum_0^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!^2\, 2^{2n}(2n+1)}x^{2n+1}$ pour $|x| <1$

Pour x=1/2 on a $\pi/6= \sum_0^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!^2(2n+1)2^{4n+1}}$

une autre formule

simplifier arctan(1/(2n-1)) - arctan(1/(2n+1)) et par les dominos

déduire $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

Formule BBP de Plouffe 1995

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)$$

$$\forall n \in N,\ \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i(8i+n)}=\sqrt{2}^n\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{x^{n+8i}}{8i+n}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}^n\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x^{n-1+8i}dx$$
$$=\sqrt{2}^n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x^{n-1}}{1-x^8}dx$$

(inversion somme-intégrale comme pour Newton ou Leibniz)
D'où avec n = 1,4,5,6 et en combinant

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx$$

en décomposant en éléments simples ou avec Maple on trouve π !