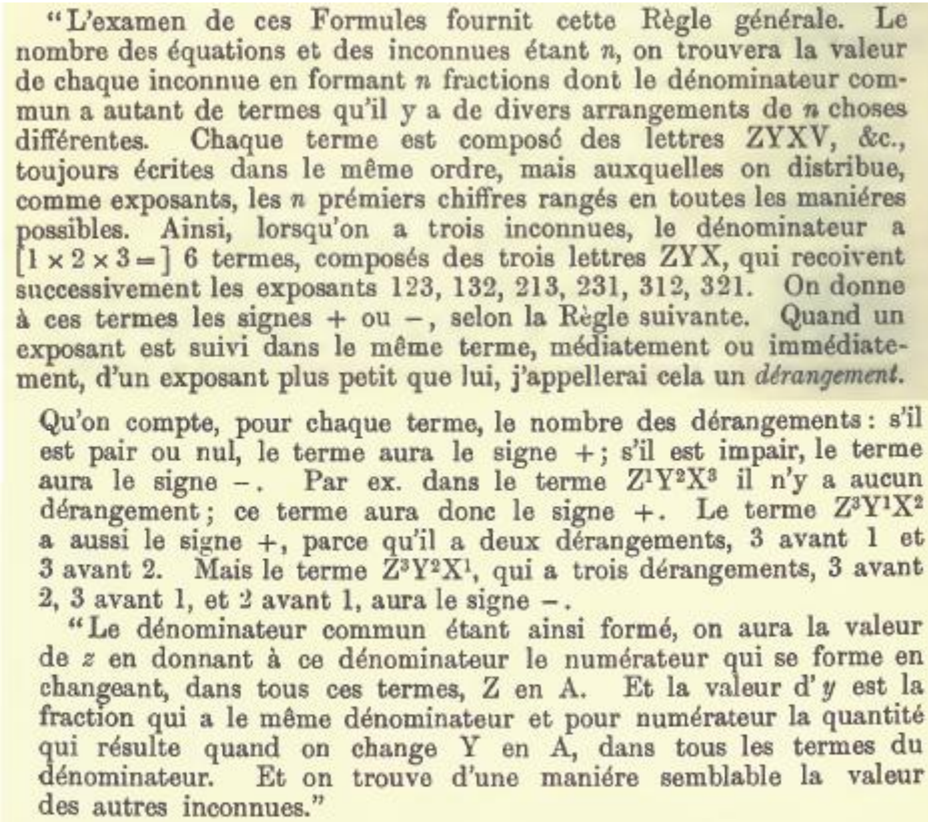
Eléments d' histoire d’algèbre linéaire

L'algèbre linéaire commence avec les systèmes linéaires mais leurs résolutions dans tous les cas et non uniquement dans le cas d'une solution unique devra attendre un siècle durant la seconde moitié du XIX et la notion de rang.


Leibniz

Les systèmes d'équations linéaires avaient déjà intéressés Leibniz (1646-1716) et Maclaurin (1698-1746) ; mais on doit au suisse Gabriel Cramer (1704-1752) la formule générale qu'il devine en 1750 mais qu'il ne démontre pas .La difficulté du problème est de voir comment se forme le signe ± ; Cramer l'explique clairement en le liant à la parité du nombre d'inversions.



“L’examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations et des inconnues étant *n*, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant *n* fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu’il y a de divers arrangements de *n* choses différentes. Chaque terme est composé des lettres ZYXV, &c., toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les *n* prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu’on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui recoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes + ou −, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d’un exposant plus petit que lui, j’appellerai cela un *dérangement*.

Qu’on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements : s’il est pair ou nul, le terme aura le signe +; s’il est impair, le terme aura le signe −. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2X^3$ il n’y a aucun dérangement; ce terme aura donc le signe +. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe +, parce qu’il a deux dérangements, 3 avant 1 et 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, et 2 avant 1, aura le signe −.

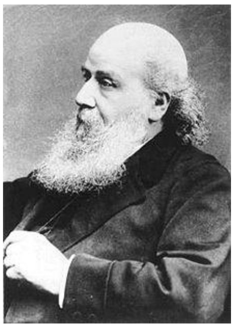
“Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de *z* en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ces termes, Z en A. Et la valeur d’*y* est la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d’une manière semblable la valeur des autres inconnues.”

Vandermonde ((1735-1796) définit la notion de déterminant , Laplace (1749-1827) introduit le développement suivant une ligne ou une colonne , mais c'est surtout

Cauchy (1789-1857) qui étudie en détail les déterminants en 1812 : il démontra les formules de Cramer , trouva le déterminant d'un produit (Binet (1786-1856) l'avait trouvé aussi) , calcula des déterminants dont celui dit de Cauchy $1/(a_k+b_i)$ et aussi celui dit de Vandermonde .C'est aussi à Cauchy que l'on doit le nom de déterminant . Jacobi (1804-1851) développa dans les années 1830 -1840 l'utilisation des déterminants en algèbre et en analyse et introduisit en 1829 le jacobien (nom donné plus tard par Sylvester (1814-1897)).


Cauchy

La notion de combinaison linéaire apparait avec l'étude des équations différentielles linéaires chez Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) et d'Alembert (1717-1783) mais l'indépendance linéaire n'apparait que chez Cauchy et que dans le cadre des équations différentielles .


Sylvester

Les matrices apparaissent après les determinants en liaison avec les transformations linéaires ;le nom de matrice est donné par Sylvester qu'en 1850 .En 1853 Hamilton (1805-1865) introduit le calcul sur les matrices puis en 1858 Cayley (1821-1895) qui avait déjà introduit vers 1840 l'espace R^n , écrit un mémoire où il définit la somme , le produit de deux matrices en signalant l'associativité , la non commutativité , en donnant l'inverse d'une matrice , la transposée d'un produit , enfin il donne son théorème $P_A(A) = 0$ où P_A est le polynôme caractéristique , tout cela uniquement pour des matrices (2,2) ou (3,3) et en admettant des résultats semblables dans le cas général .C'est aussi à Cayley que l'on doit la notation du déterminant représentée par la matrice entre deux traits verticaux.En 1868 Weierstrass (1815-1897) donna la CNS , avec les facteurs invariants , pour que deux matrices soient semblables .En 1870 Jordan (1832-1922) avait obtenu au cours de ses recherches sur le groupe $GL_n(K)$ sa forme réduite d'une matrice dite depuis de Jordan

La méthode du pivot de Gauss , entrevue par Lagrange (1736-1813) est exposée par le grand Gauss (1777-1855) en 1809 dans des calculs relativement à l'astronomie.

La résolution complète des systèmes linéaires est faite vers 1870 par Kroneker (1823-1891) grâce à la notion de rang introduite par Sylvester en 1850 comme l'ordre maximun d'un déterminant non nul extrait ; Kroneker avait introduit dès 1866 les opérations élémentaires.Le nom de rang est donné par Frobénius (1849-1917) qui unifia l'ensembe des résultats obtenus , démontra le théorème de Cayley - Hamilton (deux fois en 1878 et en 1896 ; Laguerre (1834-1886) avait démontré ce théorème en 1867) et obtint de nouveaux résultats , comme sa forme canonique ou la dimension du commutant , tout cela entre les années 1877 à 1880.

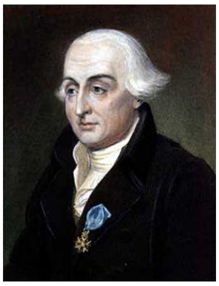
Grassman (1809-1877) introduisit dans un livre obscur en 1844 puis plus clairement en 1862 la notion de base et de dimension , son algèbre extérieure mais tout cela sans echo.Seul Péano (1858-1932) le réabilita et c'est Péano , un des créateurs de la méthode axiomatique, qui introduisit en 1888 la notion générale de R-espace vectoriel application linéaire mais sans grand echo non plus . Ce sont les mathématiciens allemands qui dans leurs travaux d'analyse (espace de Hilbert , équations intégrales) ont montré l'utilité de ces notions et leur généralité puisqu'elles apparaissent en analyse comme en algèbre;ainsi   Toeplitz (1881-1940) élève de Hilbert (1862-1943) définit la notion d'espace vectoriel sur un corps quelconque .La notion de corps au sens actuel date de 1893 avec Weber (1842-1913) mais elle a éte utilisé tout au long du XIX en liaison avec la théorie des équations et des nombres algébriques.Le nom de corps est de Dedekind (1831-1916) .


Hilbert


Kronecker

La présentation du déterminant comme fonction multilinéaire alternée de n vecteurs dans un espace de dimension n est de Weierstrass et Kroneker à la fin du XIX.
L'intéret des formes linéaires et de la dualité apparait , en analyse d'abord , dans les années 1910 , 1930 avec Riesz (1880-1956) , Banach (1882-1945).
La présentation actuelle de l'algèbre linéaire date des années 1930 avec le livre de Van Der Waerden. On peut aussi citer Emmy Noether une grande algèbriste.

The term **ORTHOGONAL MATRIX** was used in 1854 by Charles Hermite (1822-1901) in the *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* although it was not until 1878 that the formal definition of an orthogonal matrix was published by Frobenius (Kline, page 809).

 Lagrange

STRUCTURES ALGEBRIQUES

 Abel  Jordan qui étudia le groupe linéaire

Groupes
Ils apparaissent d'abord dans la théorie de résolution des équations par radicaux avec Lagrange , Abel et Galois qui introduisit la notion de sous groupes distinguées et montra la simplicité de A_n .Jordan en 1870 publie un traité consacré qu'aux groupes , il étudie les groupes S_n et $GL_n(C)$.
La notion de groupe apparait aussi en géométrie ,Klein en 1872 classifie les diverses géométries projective,affine,euclidienne selon le groupes des transfomations qui laissent invariantes les propriétés de la figure.
Les groupes apparaissent aussi en arithmétique avec Gauss , les plus simples étant Z/nZ et U(Z/nZ).
La définition moderne actuelle de groupe date de 1916 avec Yu Shmidt.

Anneaux et corps
La notion d'anneau apparait tardivement ;le mot est de Hilbert ,la définition de Dédékind.
Les corps furent introduit d'abord de manière assez flou par Abel et Galois ,clairement par Kronecker et Dedekind a qui on doit ce mot de corps en 1871.

Auparavant Hamilton en 1843 avait introduit les quaternions premier exemple de corps non abélien.En 1870 Pierce introduisit les notions d'idempotent et de nilpotent.L'étude des algèbres associatives a commencé à la fin du XIX .L'étude générale des anneaux date de 1920 avec Krull,Noether.