

D'après l'écrit du concours Epita-Ipsa-Esme 2021 :

$p$  et  $q$  sont deux projecteurs de  $E$   $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et on suppose  $poq = qop$ .

Posons  $F = p + q$ . Alors :

a)  $F^3 = 3F^2 - 2F$  et  $F$  est diagonalisable.

b)  $\text{Ker} F = \text{Ker} p \cap \text{Ker} q$  et  $\text{Ker}(F - 2id) = \text{Im} p \cap \text{Im} q$ .

c)  $\text{Ker}(F - id) = \text{Im}(2F - F^2)$ ,  $S = id - 2p$  est une symétrie et on a  $so(2F - F^2) = p - q$ , déduire que 1 est valeur propre de  $F$  si et seulement si  $p \neq q$  (soit  $\text{Im}(p - q) \neq \{0_E\}$ )