Dans la compétition hongroise Kürschak de 1979 on demande de montrer que si pour tous les réels $x$, $y$, on a : $f(x) \leq x$ et $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ alors $f(x)=x$.

Voici une autre exercice (personnel) :
Trouver $f$ vérifiant pour tous les réels $x$, $y$, $f(x)f(y)+1 \leq 2f(xy)$

Et un dernier Crux mathematicorum 4768 du brillant Mihaela Berindeanu.
Trouver $f$ si pour tous les réels $x$, $y$, on a $f(x)f(y) \leq f(xy)+x+y$.
(Il n'y a qu'une solution ! pour les deux exercices)