

Soit  $f(x, y) = \frac{x+y}{(3+x^2)(3+y^2)}$

On veut montrer que  $f(x, y) \leq f(1, 1) = \frac{1}{8}$ .

1/Avec du calcul différentiel :

a) Montrer que  $3(x+y)^2 \leq (3+x^2)(3+y^2)$

b) Si  $x^2 + y^2 \geq 5$  montrer que  $f(x, y) < \frac{1}{8}$

c) Etudier le maximum sur  $x^2 + y^2 \leq 5$

d) Conclure

2/**Directement :**

Montrer que  $8(x+y) \leq (x+y+2)^2$  puis  $(x+y+2)^2 \leq (x^2+3)(y^2+3)$ .

3/Trouver le maximum de  $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

4/Déterminer le maximum de  $g(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{(3+x^2)(3+y^2)}$

Pour les inégalités penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz