Ce problème se termine par un exercice d'oral de 2021 de grandes écoles d'ingénieurs.

1/a)Déterminer les fonctions dérivables f vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$

b)Déterminer les fonctions dérivables f dérivable en 0 vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x)+f(y)$

c)Déterminer les fonctions dérivables f, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = xy + f(x) + f(y)$

2/Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ et $g(0) = 0$, et g dérivable en 0 :

a)Montrer que $ng(x) \geq g(nx)$

b)Montrer que $g(x) \leq xg'(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c)Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + g(-x) \geq 0$ et aussi $g(x) + g(-x) \leq 0$.

d)Montrer que $g(x+y) = g(x) + g(y)$ puis conclure

3/ Déterminer les fonctions dérivables f vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) \leq xy + f(x) + f(y)$