

Exercices sur la partie entière et sur la partie fractionnaire.

La partie entière de x est noté $E(x)$, et $x - E(x) \in [0;1[$ est la partie fractionnaire notée $\{x\}$ qui est une fonction de période 1 ; par exemple $E(2.1) = 2$ et $\{2.1\} = 0.1$.

1/Montrer que pour n entier $n \geq 1$: $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ puis déduire que

$E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})$ Ramanujan en 1918.

Voici une égalité posée dans l'American math. Monthly 1983 p.483 : $E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = E(\sqrt{9n+7})$ où on montrera que $\sqrt{9n+8} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \leq \sqrt{9n+9}$ par IMAG (inégalité moyenne arithmétique et géométrique) et par concavité et une donnée dans American Math. Monthly mars 2008 :

$E(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1}) = E(\sqrt[3]{8n+3}) = E(\sqrt[3]{8n+4})$.

2/ $\{x\}$ est un nombre décimal ssi x est aussi décimal.

3/Résoudre $2021\{x\} = x$;