Un exercice de l' Américan Mathematical Monthly le problem 12260 de 2021 :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)\Big(x-sin(x)\Big)}{x^3} dx = Ln(2) - \frac{1}{2}$.

je propose d'utiliser $(\frac{sin(x)}{x})(\frac{sin(x)}{x})'$ puis d'intégrer par parties et d'utiliser une intégrale de Cauchy-Frullani $\int_0^{+\infty} \frac{cos(x)-cos(2x)}{x} dx = Ln(2)$.

Rajoutons qu'à partir de $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} (\frac{sin(x)}{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}$ on déduit $\int_0^{+\infty} \frac{1-cos(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{x-sin(x)}{x^3} dx = \frac{\pi}{4}$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{cos(x)\Big(x-sin(x)\Big)}{x^3} dx = 0$.