SERIES NUMERIQUES

1 Nature de séries suivantes

a) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$ b) $\frac{sin(\pi/n)}{\sqrt{n}}$

c)si $\alpha > 1$ la série $(\frac{1}{n^\alpha})$ converge (comparer avec l'intégrale)

d) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ e) $\frac{sin(n)}{2^n}$ f) $\frac{ln(n^2+1)}{n^2+n}$, $\frac{ln(2^n+1)}{2^n+1}$

g) $\frac{\sqrt[n]{2}}{n+ln(n)}$ h) $\frac{nsin(n)}{n^3+1}$

i) $\frac{n^2+1}{2^n+1}$ j) $sin(\frac{\pi}{2^n})$

k)$(\frac{1}{ln(n)})^n$ (comparer avec une série géométrique)

l) $e-(1+\frac{1}{n})^n$

m) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

n) $ln(1+\frac{(-1)^n}{n+1})$ o)$sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$

p) $n\ exp(-\sqrt{n})$ q) $\frac{(-1)^n}{2^n+n}$

r) $\frac{sin(\frac{\pi}{n})}{n}$ s) $\frac{e^{1/n}}{n}$ t)$\frac{e^{1/n}}{n^2}$

u) $\int_0^{\pi/n}\sqrt{sin(x)}dx$ v)$(\frac{sin(n)}{n})^2$

w)les séries (u_n) et (w_n) convergent et $un > 0$, $wn > 0$ montrer que la série max(un,wn) converge (majorer)

x) série $((\frac{n+1}{2n+1})^{ln(n)})$ et $((n+1)/(2n+1))^n)$

y) ($ln(1+\frac{1}{n})-sin(1/n)$)

z)$ln(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1})$

a')$sin(\pi/n^2)cos(\pi/n)$

b') la série sin(1) sin(1/2)...sin(1/n) converge

c') la série $\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ diverge(comparer avec une intégrale)

d') sin(1/n) - tg(1/n) avec DL

e')$\int_0^{1/n}\frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}}$ minorer

e')$\frac{1}{ln(ch(n))}$ f') $\frac{ch(n)}{ch(2n)}$

g') $\frac{1}{ln(n)^{ln(n)}}$ (utiliser la règle du n^2)

2 Existence et somme de la série

a) $n\ exp(-n)$

b) $\frac{1}{1+2+...+n}$

c)$\frac{n-1}{3^n}$ d) $\frac{cos(n\theta)}{2^n}$

e) $\frac{n+2}{n!}$

f)$\frac{n^2+1}{n!}$

g)$(-1)^n\int_0^1 x^{2n}dx$

h) $\dfrac{2^n}{(n+1)!}$

i) n^2x^n pour $x \in [0;1[$

j) $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^2(n+1)}$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

k) $\dfrac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$ $(x \in [0;1[)$

l) $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} = 6e^2$

m) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

3 Critère de Cauchy et d'Alembert simplifiés

a)si la suite $u_n \geq 0$, et $\sqrt[n]{u_n} \to 0$ montrer que la série(u_n) converge

b) si la suite (u_n) est strictement positive et si la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$ alors montrer que la série (u_n) converge

4 Convergence de la suite et nature de la série (u_n)

a) $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$ b)$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ avec $u_0 = 1$ c)$u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}$ d) $u_{n+1} = ln(1 + \dfrac{u_n}{2})$,et $u_0 = 1$

5 La série (u_n) converge , $u_n > 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

a)Montrer que la suite $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_n)$ converge

b)Montrer que la série $(\dfrac{u_n}{S_n})$ converge

c)Nature de la série $\dfrac{u_n}{1+u_n}$

d)Si les series (a_n^2) et (b_n^2) alors la série (a_nb_n) converge

6 Etudier la suite (u_n) c'est étudier la série $(u_n - u_{n-1})$

a)Montrer que la suite définie par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{e^{-u_n}}{2^n}$ et $u_0 > 0$ converge

b) Etudier la convergence de la suite $u_n = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}})-2\sqrt{n}$

c)Montrer que la suite $\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ converge

7 Fonction definie par une série

f(x)=$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{exp(-nx)}{n^2}$ est définie pour $x \geq 0$, décroissante , tend vers 0 en $+\infty$

8 Des réponses

Ex1 :a)D b)C d)D e)C f)C g)D h)C i)C j)C k) C l) D m) D n) C o)D p)C q)C r)C s)D t)C u)C $(sin(x) \leq x)$ v)C

Ex2 : a) $\frac{e}{(e-1)^2}$ b)2 c) 1/4 d) $\frac{4-2cos(\theta)}{5-4cos(\theta)}$ e) 3e

Ex3 : Pour n assez grand une suite qui tend vers 0 est inférieure à $\frac{1}{2}$ et donc pour n assez grand $u_n \leq \frac{K}{2^n}$

Ex4 :a) $u_n > 0$ pour $n \geq 1$, donc $e^{-u_n} \leq 1$, u_n tend vers 0 et la série diverge car e^{-u_n} tend vers 1 et la série (1/n) diverge.

Ex5 : faire des comparaisons ; pour le d) $0 \leq 2a_n b_n \leq a_n^2 + b_n^2$.

Ex6 : a)u_n est positif, la série $u_{n+1} - u_n$ converge car on majore par $\frac{1}{2^n}$ c) prendre le logarithme et étudier la série $w_n - w_{n-1} ln(u_n/u_{n-1}$.

Ex7 : Pour la limite , majorer par $\sum_1^{\infty} e^{-nx}$ qui se calcule car c 'est une série géométrique