Variables aléatoires à densité

1 Un bus arrive à 7h ou 7h15 ou 7h30 ;j'arrive X minutes après 7h , X suivant une loi uniforme sur [0 ;30] ,montrer que la probabilité d'attendre moins de 5 minutes est 1/3

2 Xi sont indépendantes de loi uniforme sur [0 ;1]

a) $S_n=X_1+\ldots+X_n$ Montrer que la densité f_n de S_n est :si x<0 fn(x)=0 , si $x \in [0 ;1]$ $f_n(x)= \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

(La formule générale est (Irwin&Hall 1927) pour $x \in [0 ;n]$ $f_n(x)= \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^j \binom{n}{j}\frac{(\text{x-j})^{n-1}}{(n-1)!}$)

b)Loi de $M=\max(X_1 ;\ldots ;X_n)$, vérifier E(M)=n /(n+1)

3 Soit X positive de fonction de répartition F et ayant une espérance

montrer que E(X)= $\displaystyle\int_0^{+\infty} p(X>t)\,dt = \int_0^{+\infty}(1-F(t))dt$

4 X de loi exponentielle de paramètre λ trouver la loi de Y=$\lfloor X \rfloor$ partie entière de X , la loi de $Z=X^2$, et de T=ln(X)

5 Le nombre de clients X_d qui entrent chez un vétérinaire durant une période d de temps suit une loi de Poisson de paramètre λd ;les clients arrivent indépendamment les uns des autres.
a)T1 est le temps qu'attend le secrétariat du vétérinaire, le premier client
montrer que T1 suit une loi exponentielle de paramètre λ
b)Trouver la loi de T_2 temps d'attente (pour le secrétariat) du deuxième client (chercher $p(T_2>t)$)

6 a)X de loi exponentielle de paramètre λ, calculer la médiane de X et calculer $E(X^n)$)
b)X_i sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ calculer $E(\min(X_1 ;\ldots ; X_n))$)
c)La densité $S_n= X_1+\ldots+X_n$ est si x<0 $f_n(x)= 0$ et si $x \geq 0$: $f_n(x)= \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$

d)j'ai deux clients devant moi la durée de service pour chaque client est de loi exponentielle λ ,la durée moyenne de service étant 5 mn ;espérance de mon temps d'attente ;probabilité que j'attente plus de 5 mn

7 La durée de vie C en milliers d'heures d'une pièce d'un moteur suit une loi normale et on a constaté $p(C\leq 80)=0.975$ et $p(C\leq 20)=0.16$ Trouver la moyenne m et l'écart type σ puis calculer $p(C\geq 90)$

8 Si X de loi Normale trouver la loi de $Y=e^X$ et E(Y)

9 a)Si X de loi Normale centrée réduite trouver la loi de $Y=X^2$ on dira que Y est de loi χ_1

b)Montrer que $E(Y^n)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

c)Si Y1 et Y2 sont indépendantes de loi χ_1 montrer que Z=Y1+Y2 est de loi exponentielle (1/2)

d)Calculer $E(Z^n)$ de deux manières (directe et binôme) déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$

10 X et Y normale centres réduites et indépendantes calculer P(|X+Y|<2) , E(|X-Y|)

$\boxed{11}$ X est de loi de Cauchy lorsque la densité est $f(x)=a/(1+x^2)$

a)trouver a ;X a-t-elle une espérance ?

b)montrer que la loi de $Y=1/X$ est aussi une loi de Cauchy