SUITES

1 Connaissances

- $u_n \to L$ (L CONSTANTE) lorsque $u_n - L \to 0$ soit $| u_n - L | \to 0$
- théorème des gendarmes ; le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0
- si pour n assez grand $u_n \geq w_n$ et $w_n \to +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- si (u_n) est monotone bornée elle converge
- si (u_n) converge alors (u_n) est bornée ;si $u_n \to$L>0 alors u_n>0 pour n assez grand
- passage à la limite dans une égalité ou inégalité(le strict ne passe pas à la limite)
- $u_n \to L \Leftrightarrow u_{2n} \to$L et $u_{2n+1} \to L$
- a constante $a^n \to 0 \Leftrightarrow | a | < 1$
- $u_n \sim w_n$ lorsque $\frac{u_n}{w_n} \to 1$
- $u_n = o(w_n)$ lorsque $\frac{u_n}{w_n} \to 0$, soit $u_n = w_n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$
- $ln^a(n) = o(n^b)$ si b > 0 , soit $ln(n)/n^b \to 0$,$n^b = o(a^n)$ pour a>1 , et $a^n/n! \to 0$
- $u_n = O(w_n)$ lorsque $\frac{u_n}{w_n}$ est bornée
- suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$, a b CONSTANTES si L=aL+b alors $u_n - L$ est géométrique de raison a et $u_n = L + a^n(u_0 - L) = L + a^{n-1}(u_1 - L)$
- récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec a,b CONSTANTES alors :

si r1, r2 racines distinctes de $r^2 = ar + b$ on a $u_n = c_1 r1^n +_c 2r2^n$, c_1, c_2 constantes
si r racine double on a $u_n = r^n(c_1 + c_2 n)$
si a,b réels , et $Re^{i\alpha}$ racine complexe de $z^2 = az + b$ alors $u_n = R^n(c_1 cos(n\alpha) +_c 2sin(n\alpha))$

- inégalités à connaitre :

ab $\leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $e^a \geq 1 + a$, si a>-1 $ln(1+a) \leq a$, $| sin(a) \leq | a |$, si $a \geq 0$ $sin(a) \leq a$

- équivalents à connaitre :(en 0)

$ln(1+x) \sim x; e^x - 1 \sim x; sin(x) \sim x; tg(x) \sim x$;pour a constante $(1+x)^a - 1 \sim ax$

2 Savoirs faire

- savoir utiliser les équivalents et les développements limités
- savoir encadrer et utiliser le théorème des gendarmes
- savoir que si la suite croit et est bornée , la suite converge est est majorée par sa limite
- savoir passer à la limite (à la limite il n' y a plus de n qui est à l'infini)
- savoir montrer : $| \frac{u_{n+1}}{u_n} | \to \frac{1}{2}$ alors il existe K réel et no entier tels que pour n >no , $| u_n | \leq K(\frac{3}{4})^n$

3 Méthodes

- encadrer par le théorème des gendarmes
- la suite est monotone bornée donc convergente,passage à la limite
- trois idées générales :récurrence ; absurde ;penser à utiliser le contexte
- parfois utiliser u_{2n} et u_{2n+1}

4 Exemples-Exercices

- limite de sin(n)/n , $(n + ln(n))/(n^2 + ln(n^2))$,$\lfloor nxo \rfloor / n$
- $1! + 2! + ... + n! \sim n!$; $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim ln(n)$
- équivalent et limite de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\ln(1+n^4)/\sqrt{n^2+1}$ et de $\frac{ln(1+e^n)}{ln(n+\sqrt{n})}$
- $u_{n+1} = au_n + 1$ avec a $\in]0;1[$ montrer que la suite converge
- trouver u_n si $u_{n+1} = \frac{2(n+1)u_n}{n} + n + 1$ et uo=1 (changement d'inconnue wn=un/n)
- si $u_{n+1} - u_n \to 1$ alors $u_n \to +\infty$

• si $u_n > 0$ et $u_{n+1}/u_n \to 1.1$ alors (u_n) est pour n assez grand croissante

• si $u_n \to L$, et si $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{2n+1}{n+1}$ (resp. $u_{n+1} = \dfrac{sin(u_n)}{n+u_n}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{2^n}{2^n+1} + \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ trouver L

• (pour 5/2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e$ a une unique solution strictement positive notée u_n ; etudier $f_{n+1}(u_n)$ déduire les variations de u_n et montrer $u_n \to 1$

• x+ln(x)=n a une solution x_n , montrer x_n tend vers $+\infty$, $x_n \sim n$, et $x - n \sim -ln(n)$

• $f_n(x) = x^{n+1} + x^{n-1} = 2 + \dfrac{1}{n}$ a une solution $x_n > 0$,calculer x_1 ,montrer $x_n \geq 1$ calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ montrer que (x_n) converge vers 1 par l'absurde ;pour 5/2 : montrer $n(x_n - 1) \to 0$ puis que $x_n - 1 \sim \dfrac{1}{2n^2}$

• $u_{n+1} = f(u_n)$ si l'intervalle I est stable par f soir $f(I) \subset I$, $u_o \in I$ donc $u_n \in I$ alors :

– si f croit sur I alors (u_n) est monotone (croit ou décroit selon $f(uo) \geq uo$ ou$f(u_o) \leq uo)$ $u_{n+1} \geq u_n \geq$ par récurrence si $u_1 \geq u_o$)et si I est bornée u_n converge vers un point fixe L de f soit f(L)=L si f CONTINUE sur I

– si pour tout n $u_n \in I$ et pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq x$ (resp$f(x) \geq x$) alors (u_n)croit (resp décroit) ,

– si $L \in I$ et f(L)=L et $| f(u_n) - f(L) | \leq k | u_n - L |$ avec k CONSTANTE et $0 \leq k < 1$(par l'inégalité des accroissements finis soit si pour tout x de I $| f'(x) | \leq k$)
alors par récurrence $| u_n - L | \leq k^n | u_o - L |$ et par les gendarmes $u_n \to L$
f(x)=sin(x) , uo $\in [0; \pi/2]$;
f(x)=(4x+5)/(x+3), uo >0
f(x)=$\dfrac{e^{-x}}{x^2+4}$, et $u_o \in$[0 ;1]=I montrer que I est stable par f que pour x $\in I$ $| f'(x) | \leq \dfrac{7}{16}$ et qu'il existe L $\in$ I tel que f(L)=L puis $u_n \to L$
$f(x) = (1-x)^2$ et uo=1/2 alors I=[0 ;1] est stable par f qui décroit sur I ;(u_{2n}) croit ,(u_{2n+1}) décroit ,u_{2n} ≥1/2 et $u_{2n+1} \leq u_1 = 1/4$ la suite diverge
f(x)=1+(2/x) uo=1 alors u_{2n} et u_{2n+1} converge vers 2 donc u_n converge vers 2 ; ou bien u_n est entre 3/2 et 3 pour n > 1 et sur I=[3/2 ;3] on a $| f'(x) | \leq 8/9 < 1$