chapitre

sommes finies

I Somme simple

$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + ... + a_n$ ne pas hésiter à écrire sans sigma ; $\sum_{k=p}^{n} c$ =???

A connaitre parfaitement :

(a) si $z \neq 1$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}}$

(par récurrence , ou dominos avec $\sum z^k(1-z)$)

(b) $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$

(par récurrence avec changement d'indice et la formule du triangle de Pascal et connaitre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$ et la formule du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

exercice :calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

(c) Dominos ou somme télescopique $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1}$

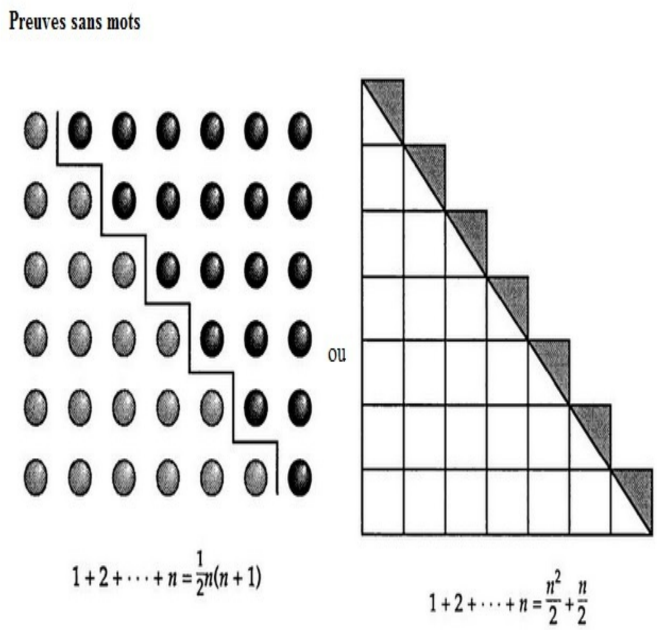
(en écrivant sans sigma et simplifiant ou par changement d'indice)

(d) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ (par changement d'indice i=n+1-k)

(e) $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ (par récurrence ou dominos avec$(k+1)^3 - k^3$)

en cas de doute vérifier avec un petit n ;


cette dernière formule donnant le nombre de boulets de canon dans un tas pyramidal était parait -il secrète au XVII ème)



(f) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$=....

Penser à montrer un résultat donné par récurrence : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ içi sur n ; à voir ausi avec la formule de Pascal et les dominos ; $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ par récurrence et aussi directement

Savoir séparer les sigma $\sum(a_k+cb_k)=\sum a_k+c\sum b_k$

exercice : simplifier $\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\sum_{k=n}^{2n-1}(2k+1)}$

Savoir regrouper les sommes $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}+\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}=\ldots$

savoir séparer pair , impair $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k=$

Savoir changer d'indice poser $i=k+1$ dans $\sum_{k=1}^{n} ka_{k+1}=\ldots..$

Savoir utiliser $\prod_{k=1}^{n}$ par exemple $\prod_{k=1}^{n}(pa_k)=\ldots.$

$\prod a_k b_k=\prod a_k\prod b_k$

<u>Exercices :</u> a) $\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$ b) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-2a_k+a_{k-1})$ c) $\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$

d) $si\ u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$ calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k - 1}$ e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^2$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} sin(k\alpha)$ g) si $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$ et que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - \bar{x}\bar{y}$

Il faut savoir déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ en écrivant que c'est Re($\sum e^{ki\theta}$) puis la série géométrique puis le petit truc : $1 - e^{i\theta} = -2isin(\theta/2)e^{i\theta/2}$ qui permet d eprendre ensuite la partie réelle facilement ;savoir faire de même avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$ et la partie imaginaire.Noter que si on vous donne le résultat vous pouvez montrer la formule par récurrence si vous connaissez vos formules trigonométriques comme il faut.Cela peut aussi se faire avec les dominos

Methodes se ramener à la série géométrique , ou au binôme ou aux dominos ou bien une récurrence si on connait la formule ou si on devine le résultat

II Somme double

Connaitre parfaitement $\boxed{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j}$ Savoir calculer une somme double par sommations successives :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} = \frac{n^2 + 3n}{4}$$

Savoir permuter les sigmas

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} x^k \sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le i\le k} x^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{n} x^i (1 + x + ... + x^{n-i}) =$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{1 - x^{n-i+1}}{1-x}$ = ... absolument à faire et à finir

si $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ calculer en fonction de H_n et de n , $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$

Exercices : a) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} min(i,j)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}$

d)la trace d'une matrice carrée A de type (n,n) est la somme des coefficient diagonaux tr(A)= $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ montrer que la trace est linéaire et que tr(AB)=tr(BA)

e)si $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$ alors $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$