chapitre

SERIES NUMERIQUES

I Généralité

1/Définitions

a)Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.
La série numérique de terme général (a_n) est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où S_n est la somme partielle

$$S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

si la suite (a_n) est seulement définie à partir de n_0 la somme partielle commence à n_0 par exemple étudier la série $(\frac{1}{n^2})$ c'est étudier la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

b)

La série numérique (a_n) est dite convergente lorsque la suite des sommes partielles converge et dans ce cas la somme de la série qui est la limite des sommes partielles est notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = lim\ S_n$

Par exemple la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme est 1 : on va utiliser pour calculer la somme partielle le principe des dominos ou somme télescopique :

Si la suite des sommes partielles ne converge pas , on dit que la série diverge , la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, n'existe alors pas

exemple fondamental : la série (1/n) diverge on sait que pour x >-1 on a $ln(1+x) \leq x$ avec x=1/n en sommant les inégalités et avec le principe des dominos on a :

autre méthode : par l'absurde si la suite (S_n) converge alors la suite $(S_{2n} - S_n)$ tend vers 0 mais

Remarque : dans la somme partielle d'une série , le terme général ne dépend que de k ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ n'est pas une somme partielle de série c'est une somme de Riemann qui converge ln(2) ; rappelons $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \to \int_0^1 f(t)dt$

c)Si la série (an) converge ,de somme partielle (Sn) et de somme S qui est la limite de (Sn) , soit n un entier , le reste d'ordre n de la série est Rn = S - S_n on a

$$R_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

la suite des restes tend vers 0 et on a S = $S_n + R_n$

c)Rapport entre la suite (an) et la série (an) :

*On a $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$; si la série (an) converge alors la suite (an) converge vers 0

La réciproque est fausse : série (1/n)

demonstration on a : an = $S_n - S_{n-1}$

*Etudier la suite (a_n) c'est étudier la série $(a_n - a_{n-1})$

2/Exemple fondamental la série géométrique :

*La série de terme général 1 diverge car la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} 1 =$

La seule série dont le terme général est constant , et qui converge est la série de terme général 0.

*Soit a une constante réelle a ≠ 1

On sait que pour a ≠ 1 on a $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ La suite (a^n) converge si et seulement si $|a| < 1$ (car $a \neq 1$)

La série (a^n) converge si et seulement si $|a| < 1$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$

si on commence à n=1 $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \dfrac{a}{1-a}$

et en général si on commence à n0 on factorise par a_0^n pour se ramener à une somme qui commence par 1

Calcul du reste de la série $(1/2^n)$:

La série (e^{-n}) converge ; calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ pour x >0

calcul de S=$\sum_{2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^{n+1}}$

Remarque :ceci est encore valable pour a complexe et $|a| < 1$

par exemple $a = \frac{i}{2}$

exercice : montrer que la série (a_n) converge $\Leftrightarrow$ la série (a_{n+1}) converge

3/Propriétés genérales

> a)si la série (a_n) converge alors la suite (a_n) tend vers 0
> La réciproque est fausse : série (1/n)
> b)si les séries (a_n) et (b_n) convergent alors la série $(a_n + b_n)$ converge et on a
> $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

dem :

c)Si la série (an) converge et si λ est un réel (ou complexe) alors la série (λan) converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$

les séries (a_n) et $(-a_n)$ ont même nature

si les série (a_n) et $b_n)$ convergent alors la série $(a_n - b_n)$ aussi et en générale $(\alpha a_n + \beta b_n)$ pour α et β constantes et on a $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

dem :

d)Si les suites (a_n) et (b_n) sont égales pour $n \geq n0$ alors les séries (a_n) et (b_n) convergent ou divergent simultanément (mais leur somme ne sont pas forcément égales) en particulier la série $(a_n)_{n \geq no}$ et la série $(a_n)_{n \geq 0}$ ont la même nature : les premières valeurs de la suite (a_n) ne compte pas pour la convergence de la série(a_n)

dem :

II Série de terme général positif

1/a)

> Théorème fondamental : soit (a_n) une suite de réels positifs , la série (a_n) converge si seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée

dem :

b)Série $\frac{1}{n^2}$

La série de terme général $(\frac{1}{n^2})$ converge et Euler a montré que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Tandis que la série (1/n) diverge

Pour montrer cela on va utiliser la comparaison série intégrale

on a : $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$

c)Critère de comparaison

s'il existe un entier no tel que pour $n \geq no$ on ait $0 \leq a_n \leq b_n$ alors si la série (b_n) converge alors la série (a_n) converge et $\sum_{n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n_0}^{+\infty} b_n$

et si la série (an) diverge alors la série (b_n) diverge

dem :

exemples :

la série $(\frac{1}{n^2})$ converge on compare avec 1/n(n-1) la série (ln(n) /n) diverge

la série $(tg(1/n))$ diverge

la série converge (1/n !) converge

la série $(\frac{1}{2^{n^2}})$ converge

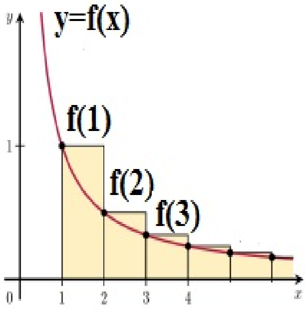
la série $(sin(n)/n)^2$ converge

la série $\frac{n}{2^n} \leq (\frac{3}{4})^n$ converge

si la série (an) converge $(a_n \geq 0)$ alors la série $(\frac{a_n}{n})$ converge

si la série (an) converge alors la série $(\frac{\sqrt{a_n}}{n})$ converge
si la série (an) converge alors la série (a_n^2) converge

d)<u>Comparaison avec une intégrale :</u>
Si f décroit sur $[1;+\infty[$ alors on a :



remarque : c'est similaire si f décroit à partir de n_0
exemples : la série $(\frac{1}{nln^2(n)})$) converge et la série (1/nln(n)) diverge
remarque : $\frac{1}{nln^2(n)} = o(\frac{1}{n})$ et pourtant elle converge

e)Etudier la suite (a_n) c'est étudier la série $a_n - a_{n-1}$
exemple : $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2 a_{n-2}}$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$

alors (a_n) existe pour tout n et $a_n \geq 1$ la série $(a_n - a_{n-1})$ converge donc la suite (a_n) converge

2/critères indirects de comparaison

Régle du petit ou grand O

si $a_n \geq 0$ et $a_n = O(b_n)$ (ou si $a_n = o(b_n)$) alors si la série (b_n) converge ,la série (a_n) aussi ,
en particulier si $n^2 u_n \to 0$ alors la série (u_n) converge
si $nu_n \to$ L >0 ou $+\infty$ alors la série (u_n) diverge
dem :

exemples : la série $(\frac{n^3}{2^n})$, converge

IIISérie absolument convergente

1/Théorème a)

si la série $(|a_n|)$ converge alors la série (a_n) converge ; c'est valable pour (a_n) réelle ou complexe
on a l'inégalité $|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$
On dit que la série (a_n) converge absolument lorsque la série $(| a_n |)$ converge c'est une condition suffisante de convergence pour la série (a_n)
La réciproque est fausse : la série (a_n) peut converger et la série $(| a_n |)$ diverger ; si la série $(| a_n |)$ diverge on ne peut rien conclure sur la série (a_n)

dem :

b)exemples :

la série $\frac{sin(n)}{n^2}$ converge

la suite définie par $u_{n+1} = u_n + \frac{sin(u_n)}{n^2}$ et u_1 converge

pour x réel $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

demonstration avec la formule de taylor intégrale dans le cas x>0

contre exemple :

la série $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme est -ln2

noter que la série (a_{2n}) diverge

on va intégrer la série géométrique

exercice : si la série (u_n) converge absolument alors les séries (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}$

c)règle du grand ou petit o

Si $a_n = O(b_n)$ (ou si $a_n = o(b_n)$) alors si la série (b_n) converge absolument ,la série (a_n) converge absolument donc converge

dem :

exemple :la série $(\frac{ln(n)sin(n)}{n^2+n})$

d)Utilisation d'un développement limité :
exemple :$u_n = ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$

2/theorème

Si la série (a_n) converge absolument alors si σ est une bijection de $\mathbb{N}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes soit encore l'ordre de sommation ne compte pas ;on peut sommer les termes dans l'ordre qu'on veut ;on peut ordonner les termes dans l'ordre qu'on veut la somme sera la même
Noter que lorsque la série converge absolument , on peut aussi regrouper par paquet comme on veut par exemple pair ,impair :$\sum u_k = \sum u_{2k} + \sum u_{2k+1}$
ces résultats sont faux en général : pour $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et la bijection de $\mathbb{N}^*$ définie par :
$\sigma(3n+1) = 4n+1, \sigma(3n+2) = 4n+3, \sigma(3n+3) = 2n+2$
si $u_n = (-1)^n/n$ la série u_{2n} diverge IVcalcul de la somme d'une série

1/linéarité
sh(x) =

2/dominos
a) la série $\frac{n}{(n+1)!}$ converge :

b)développement décimal d'un réel positif

3/<u>utilisation de la série géométrique</u>
a) a=(1+i)/2 et prendre la partie réelle

b)dériver la série géométrique

c)integrer une série géométrique
ln(1+x)=

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

4/<u>Taylor intégrale</u>
cos(x)=
sin(x)=

Résumé

•la série (a_n) converge signifie la suite $S_n = a_1 + ... + a_n$ converge

• $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ = Lim S_n à calculer avec dominos , série géométrique ou intégrale

• deux exemples fondamentaux :série géométrique a^n avec $|a| < 1$ et $(\frac{1}{n^2})$, elles convergent

• Comme $a_n = S_n - S_{n-1}$ vérifier si $a_n \longrightarrow 0$

Voir le signe de a_n si $a_n \geq 0$ alors (S_n) croit , reste à voir si (S_n) est majorée ;utiliser le <u>critère de comparaison</u>

(évaluer la vitesse de convergence par l'équivalent ; critère $o(1/n^2)$)

• Si le signe de a_n varie utiliser la convergence absolue et majorer $|a_n|$

• La suite (u_n) converge ⇔ la série $(u_n - u_{n-1})$converge ;

exemple : $u_n = (\sum_{1}^{n} \frac{1}{k})$ **-ln(n)**

• Connaitre $\sum_{0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ **pour $|x|$ <1**

sa dérivée $\sum_{1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

et sa dérivée seconde $\sum_{2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$