

PROBABILITES FINIES

1 On choisit 3 cartes parmi 52 probabilité d'avoir la même couleur

a) si le tirage est une par une sans remise

b) si on en prend 3 simultanément

2 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ;

a) On tire k boules simultanément ($1 \leq k \leq n$) probabilité d'avoir la boule i_0 ($1 \leq i_0 \leq n$)

b) On tire k boules successivement , sans remise , probabilité d'avoir la boule i_0

c) On tire k boules successivement , avec remise , probabilité d'avoir la boule i_0 au moins une fois

3 On lance n fois un dé a) probabilité d'avoir au moins 2 fois un as

b) probabilité d'avoir au moins un as et au moins un six

4 Trois usines produisent le même produit , dans les proportions 30% , 30% et pour l'usine 3 de 40%

Les proportions de biens défectueux sont respectivement 4%, 3%, 2%

Quelle est la probabilité qu'un bien défectueux provienne de l'usine 3 ?

5 On a 3 pièces dont une a deux côtés " face"; On prend une pièce et on la lance

a) probabilité d'avoir face

b) Si on lance la pièce n fois et qu'on a n fois face , probabilité que cela soit la pièce truquée

6 On a n urnes , l'urne k contient k boules blanches et $n+1-k$ boules noires ; on choisit une urne puis une boule ; la probabilité de choisir l'urne k est ka

a) Trouver la constante a

b) Trouver la probabilité d'avoir une boule noire

c) Sachant que la boule est noire quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne k

7 Dans un zoo une otarie est dressée pour rattraper un ballon .Si l'otarie vient de rattraper le ballon elle le rattrape encore avec une probabilité de 0.3 ; si elle vient de le rater elle le rattrape avec une probabilité de 0.9. Au premier coup l'otarie rattrape le ballon .Soit B_n l'évènement l'otarie rattrape le ballon lors de l'essai n et soit p_n sa probabilité. Trouver une formule de récurrence pour calculer p_n et calculer p_n et sa limite

8 On a 3 dés 1 normal , 1 avec 3 faces 1 et 3 faces 6 , et un dernier dé dont la probabilité de donner 6 est 0.5 et les autres faces 1, 2, 3, 4 ou 5 ont la même probabilité. On tire une boule dans une urne contenant 2 boules 1 , 1 boule 2 et 1 boule 3. Le n° de la boule indique le dé choisit ; on lance alors le dé 3 fois calculer la probabilité d'avoir au moins une fois la face 1

9] en utilisant que $x(1-x) \leq 1/4$ pour $x \in [0,1]$ montrer que $p(A \cap B) - p(A)p(B) \leq 1/4$

10] Le sujet de fin d'année peut être posé par 3 profs A avec la probabilité 0.35 , B 0.4 et C ;un chapitre redouté par les élèves peut être posé par A avec la probabilité 0.1 , par B 0.4 et par C 0.8

Le jour de l'examen arrive et le chapitre redouté est tombé .

Calculer la probabilité que C ait posé le sujet

11] Une urne contient r boules rouges et n boules noires ;on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant d boules de la même couleur

a)Calculer la probabilité que la boule 2 soit noire

b)Calculer la probabilité que la première soit noire ,lorsqu'on a tiré une boule noire au tirage 2

12] On a deux pièces A qui donne pile avec la probabilité a et B qui donne pile avec la probabilité b avec $a+b < 1$.On choisit une pièce, si on a pile on relance la même pièce, sinon on prend l'autre pièce

a)Calculer la probabilité de lancer A au k ième lancé (chercher une formule de récurrence)

b)probabilité d'avoir pile au k ième lancé et limite si $n \rightarrow +\infty$

13] un insecte se promène sur un triangle équilatéral ABC ;pour $t=0$ il est en A ,il choisit au hasard sa destination à chaque fois ; A_n , B_n , C_n sont les évènements être en A, B,C au temps $t=n$

Calculer $p(A_n)=a_n$, $p(B_n)=b_n$, $p(C_n)=c_n$ et les limites de ces suites

14] Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note :

B_1 l'évènement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'évènement "obtenir une boule blanche au second tirage"

B_1 et B_2 sont ils indépendants ?

15] Monsieur Dubouchon pêche à la ligne dans son étang où ne vivent que trois pauvres carpes et sept pauvres tanches. Il a décidé de pêcher jusqu'à ce qu'il ait pris quatre poissons. En supposant que chacun des dix poissons ait la même probabilité de se faire prendre (dans n'importe quel ordre) et ont tous des poids différents ,calculer les probabilités des évènements suivants :

A = « l'un exactement des quatre poissons pris est une carpe »

B = « l'un au moins des quatre poissons pris est une carpe »

C = « le premier poisson pris est une carpe »

D = « le second poisson pris est une carpe »

E = « les deux premiers poissons pris sont des carpes »

F= « les 4 poissons sont de plus en plus gros »

16] Un placard contient 10 paires de chaussures toutes différentes. On prend 4 chaussures au hasard.

Quelle est la probabilité d'obtenir :a) deux paires complètes b) au moins une paire complète (réponse 99/323)

17] Une urne contient 4 boules blanches, 5 noires , 6 rouges; On en tire 5 a) simultanément b) avec remise .Probabilité d'avoir 1 blanche, 2 noires, 2 rouges;on en tire 3 , probabilité d'avoir les 3 couleurs

solution 1 a) $1/16$ b) $4 \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}}$

solution 2 a) k/n b) k/n c) $1 - ((n-1)/n)^k$

solution 3 a) $1 - (5/6)^n - n(1/6)(5/6)^{n-1}$ b) $1 - (2(5/6)^n - (4/6)^n)$

solution 4 $8/29$

solution 5 a) $2/3$ b) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$

solution 6 : $a=2/n(n+1)$ et c) $6(n+1-k)k/n(n+1)(n+2)$

solution 7 $p_{n+1} = 0.9 - 0.6 p_n$ qui tend vers $9/16$

solution 9 si par exemple $p(A) \leq p(B)$ alors $p(A \cap B) - p(A)p(B) = p(A)p(B|A) - p(A)p(B) \leq p(A)(1 - p(A))$

solution 10 0.506

solution 11 a) $n/(n+r)$ b) $(d+n)/(d+n+r)$

solution 12 $p(A_{k+1}) = (a+b-1)p(A_k) + 1-b$ $p(P_k) = (a-b)p(A_k) + b$

solution 14 non $p(B1)p(B2) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$ et $p(B1 \cap B2) = 0.37$ (2 cas $U1BB$ ou $U2BB$)

solution 15 $p(A) = 1/2$ (hypergeometrique) $p(B) = 1 - 1/6 = 5/6$ $p(C) = p(D) = 3/10$ $p(E) = 1/15$

$p(F) =$ suite strict croissante 4 parmi 10 / $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 1/24$

solution 16: a) $3/323 = 2$ parmi 10 / (4 parmi 20) b) $1 - 2^4 (4 \text{ parmi } 10) / (4 \text{ parmi } 20) = 99/323$

solution 17 a) $(1 \text{ parmi } 4) (2 \text{ parmi } 5) (2 \text{ parmi } 6) / (5 \text{ parmi } 15)$

b) anagramme de BNNRR : $(5! / (1!2!2!)) (4 \cdot 5^2 \cdot 6^2) / 15^5$

c) simultanément ou sans remise $4 \times 5 \times 6 / 3$ parmi 15

avec remise : $3! \cdot 4 \times 5 \times 6 / 15^3$