matrices & systèmes linéaires

1/a) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Montrer que $A^2-\mathrm{Tr}(A)A+\det(A)\,I=0$ b)Montrer que $A^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A)=\det(A)=0$

c)Calculer A^n si $A=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

d)Résoudre $X^2+X = A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (utiliser que XA=AX) e)Résoudre $X^2+X+I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $A=\begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ m^{-1} & 0 & m \\ m^{-2} & m^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ a)calculer A^2-A-2I

b)Montrer que $A^n=a_n A + b_n I$ et déterminer a_n et b_n

c)Calculer A^n en utilisant le binôme et B=A+I et C=A-2I

d)Déterminer le reste de la division de X^n par (X+1)(X-2) et retrouver A^n

e)Calculer la puissance n de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3/ $\det\begin{pmatrix} \sin x & \sin(2x) & \sin(3x) \\ \sin y & \sin(2y) & \sin(3y) \\ \sin(z) & \sin(2z) & \sin(3z) \end{pmatrix}$ sous forme factorisée ;

$\det\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & -a+b-c & 2b \\ 2c & 2c & -a-b+c \end{pmatrix}=(a+b+c)^3$ et $\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}\right)$

4/Calculer A^2 où $A=(a_{ij})$ $a_{ij}=i/j$ $1\le i,j \le n$;calculer $(A+I)^{-1}$

5/Calculer $\mathrm{tr}(AE_{kl})$ A et E_{kl} matrice carrées (n,n)

6/ $a_{kl}=\exp(2ikl\pi/n)$ $1\le k,l \le n$ Calculer $A\overline{A}$ et A^2

7/Résoudre a) $X+\mathrm{tr}(X)A=B$ b) $X+{}^tX=\mathrm{tr}(X)\,A$

8/a)Résoudre x+y-z=a , 2x+y+z=b 3x+2y+z=c

b)Résoudre 2y-z=a x+y+z=b x+3y =c

c)Résoudre x+z=a , y+z=b, x+y=c, 2x+3y=d

9/ Echelonné la matrice par des opérations sur les lignes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10/ Résoudre et discuter $ax_1+x_2+\dots+x_n=1$, $x_1+ax_2+x_3+\dots+x_n=1$,....
$x_1+x_2+\dots+ax_{n-1}+x_n=1$ et $x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+ax_n=1$

11/ Resoudre avec les formules de cramer le système
$x+ay+a^2z=a^3$ $x+by+b^2z=b^3$ $x+cy+c^2z=c^3$ (a,b,c 2 à 2 distincts)