GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L' ESPACE

Coordonnées d'un point , d'un vecteur

repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$M\ (x;y;z)$ $\qquad \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Le triplet $(x;y;z)$ est appelé coordonnées du point M

On appelle x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M.

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Le triplet $(x;y;z)$ est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$

on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\ (x;y;z)$

Vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u'}$ colinéaires= même direction= parallèles= proportionnels

$\vec{u'} = t\,\vec{u}$ **soit x'=tx et y'=ty et z'=tz**

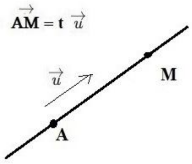
Équations paramétriques d'une droite

Soient $A\,(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace et $\vec{u}\,(a;b;c)$ un vecteur non nul. La droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées **M** $(x;y;z)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \mathbf{t}\,a \\ y = y_0 + \mathbf{t}\,b \\ z = z_0 + \mathbf{t}\,c \end{cases}$$

$\mathbf{M} \in \Delta \iff \overrightarrow{\mathbf{AM}} = \mathrm{t}\,\vec{u}$

$\mathbf{t} \in \mathbb{R}$



Si A (0, 3, 1) et $\vec{u}$ (1,2,3) M(2,7,7) $\in \Delta$
car avec t=2 on a l'égalité précédente

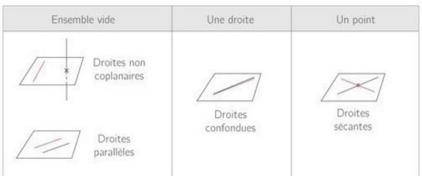
intersection de 2 droites Δ et Δ
on résout le système de 3 équations à 2 inconnues t , t'

$$\begin{cases} x_0 + \mathbf{t}\,a = x_0' + \mathbf{t'}a' \\ y_0 + \mathbf{t}\,b = y_0' + \mathbf{t'}b' \\ z_0 + \mathbf{t}\,c = z_0' + \mathbf{t'}c' \end{cases}$$

s'il y a une solution,
les 2 droites ont un point commun ,
elles sont sécantes

Deux droites sont coplanaires(dans un même plan) lorsqu' elles sont parallèles ($\vec{u}$ et $\vec{u}$' colinéaires) ou sécantes

Intersection de deux droites



Vecteur $\overrightarrow{AB}\ \left((x_B - x_A)\ ;\ (y_B - y_A)\ ;\ (z_B - z_A) \right)$

retenir: extrémité - origine

$\vec{u}\,(a;b;c)$ **Longueur de $\vec{u}$ dans repère orthonormé**

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}$

Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

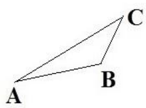
$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Distance

Dans un repère orthonormal, la distance AB est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

c'est la longueur de $\overrightarrow{AB}$



Relation de Chasles: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

$-\ \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}$

Droite passant par Ao(xo,yo,zo) dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnée (a,b,c)

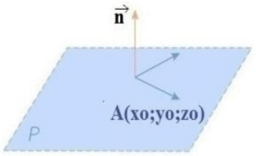
x= xo+at y=yo+bt z=zo+ct

car $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \mathbf{t}\ \vec{u}$

Équation cartésienne d'un plan

Vecteur normal

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P



Soit P le plan d'équation cartésienne Ax+By+Cz=D

$A(x_0; y_0; z_0)$ **appartient au plan lorsque Axo+Byo+Czo=D**

$\vec{u}$ **(a,b,c) est dans le plan (parallèle au plan) lorsque Aa+Bb+Cc=0**

ou encore Δ **de direction** $\vec{u}$ **est parallèle au plan lorsque Aa+Bb+Cc=0**

Le vecteur de coordonnées (A,B,C) est normal au plan Ax+By+Cz=D

si Aa+Bb+Cc≠0 c'est que le plan et la droite sont sécants

Intersection droite dirigée par (a,b,c) et plan:

On injecte x= xo+at y=yo+bt z=zo+ct dans Ax+By+Cz=D d'où t (si Aa+Bb+Cc≠ 0) puis le point.

Intersection de la droite x= xo+at y=yo+bt z=zo+ct

avec le plan Ax+By+Cz=D on résout l'équation en t

A(xo+at)+ B(yo+bt)+C(zo+ct)=D

$\vec{u}$ **(e,f,g) est perpendiculaire au plan lorsque** $\vec{u}$ **est colinéaire à** $\vec{n}$

Soient $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et d un réel.

Une équation cartésienne du plan P admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal est $ax + by + cz = d$

$A(x_0; y_0; z_0)$ **appartient au plan lorsque axo+byo+czo=d**

Plan passant par A de normale $\vec{n}$ **a(x-xo)+b(y-yo)+c(z-zo)=0**

M appartient au plan passant par M de normal $\vec{n}$

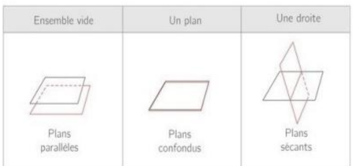
si et seulement si $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$

Deux plans parallèles ont la même direction normale donc ont des vecteurs normaux colinéaires.

par exemple ax+by+cz=d et ax+by+cz= d' sont parallèles

Intersection d'une droite et d'un plan

Intersection de deux plans



PRODUIT SCALAIRE

Soit un repère orthonormal de l'espace $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{u'}\,(x';y';z')$ est égal à :

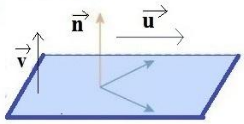
$< \vec{u};\vec{u'} >= \vec{u}\bullet\vec{u'} = xx' + yy' + zz'$ $\qquad$ $< \vec{u}\ ;\ \vec{u} > = \left|\left|\ \vec{u}\ \right|\right|^2$

$\vec{u}\bullet\vec{u'} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u'}|| \times \cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ $\qquad$ $||\vec{u}||^2 = x^2+y^2+z^2$

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, perpendiculaires , lorsque $\vec{u}\cdot\vec{u'} = 0$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

$\vec{u}$ (e,f,g) est parallèle au plan de normale $\vec{n}$ (a, b , c)
lorsque $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ soit $ae+bf+cg=0$

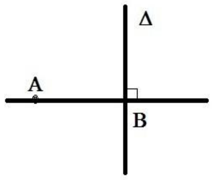


$\vec{v}$ orthogonale au plan
lorsque $\vec{v}$ est parallèle à $\vec{n}$

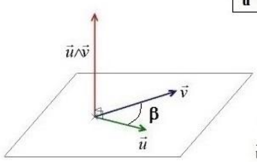
Exercice trouver la direction de la droite passant par A(3;1;-2)

et coupant et étant orthogonale à la droite Δ $x= -1+t$, $y=-2+t$ $z= -1 +t$

On cherchera le point d'intersection B (a,b,c) des 2 droites et on exprimera qu'elles sont orthogonales



PRODUIT VECTORIEL



$\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_3 & y_3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2.y_3 - x_3.y_2\\x_3.y_1 - x_1.y_3\\x_1.y_2 - x_2.y_1\end{pmatrix}$$

$\vec{u}\wedge\vec{w} = -\vec{w}\wedge\vec{u}$

$\vec{u}\wedge t\,\vec{v} = t\,(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (t\,\vec{u})\wedge\vec{v}$

$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des directions non colinéaires du plan alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires (angle $\beta = 0$ ou π)

$\vec{u}\wedge\vec{u} = \vec{0}$

$\|\ \vec{u}\wedge\vec{v}\ \| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\sin(\beta)$ $\quad$ si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\|\ \vec{u}\wedge\vec{v}\ \| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$

$\|\ \vec{u}\wedge\vec{v}\ \|^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

Si $\vec{n}$ est la normale à un plan P et $\vec{n'}$ à un plan P'

Exemple l'aire de A(1,2,3), B(1,1,1) C(0,2,4) est $\frac{\sqrt{6}}{2}$

P // P' lorsque $\vec{n}$, $\vec{n'}$ sont colinéaires; soit $\vec{n}\wedge\vec{n'} = \vec{0}$

sinon si $\vec{n}\wedge\vec{n'} \neq \vec{0}$ les 2 plans sont sécants, se coupent suivant une droite dirigée par $\vec{n}\wedge\vec{n'}$

La direction de la droite d' intersection des plans $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ est donnée par $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

car cette direction est orthogonale à chacune des normales

Exercice: plan passant par A(1,1,1) B(2,2,2) C(1,2,3) : calculer un vecteur normal qui est $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

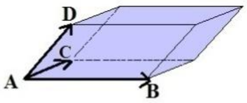
Equation du plan passant par A(1,1,1), B(1,2,3) et parallèle à la droite D: $x=1+t$, $y=2+t$, $z=3+2t$

Trouver un vecteur unitaire orthogonal à la droite D et au vecteur de coordonnées (2,1,1)

DETERMINANT

$$\det(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}'') = \vec{u} \cdot (\vec{u}' \wedge \vec{u}'') = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$= x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$$



$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ est le volume du parallélepipède construit sur les 3 vecteurs

M est dans le plan passant par A dirigé par $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}', \vec{u}'') = 0$

A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$ (volume =0)

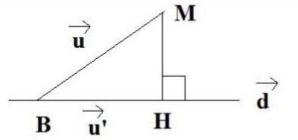
PROJECTION ORTHOGONALE

La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{u}$ sur une droite dirigée par un vecteur $\vec{d}$

est le vecteur $\vec{u}' = \dfrac{<\vec{u}\,;\vec{d}>}{||\vec{d}||^2}\,\vec{d}$

En effet $\vec{u}' = t\,\vec{d}$ et on doit avoir $\vec{u} - \vec{u}'$ orthogonal à $\vec{d}$

Donc $<\vec{u} - \vec{u}'\,;\vec{d}> = 0$ d'où $<\vec{u}\,;\vec{d}> = t<\vec{d}\,;\vec{d}>$
$= t\,||\vec{d}||^2$



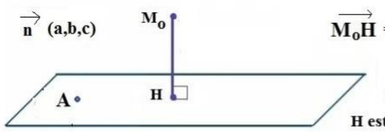
$\vec{u} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HM}$

$\vec{u} = \vec{u}' + \overrightarrow{HM}$

DISTANCE POINT M_0 A PLAN

Le plan est ax+by+cz+d=0

$\vec{n}$ (a,b,c)



$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\overrightarrow{M_0H} = t\,\vec{n}$ donc $M_0H = |t|\,||\vec{n}||$
$= |t|\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$x = x_0 + ta$ $y = y_0 + tb$ $z = z_0 + tc$

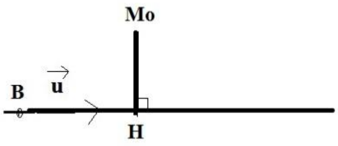
H est dans le plan donc ax+by+cz+d=0

d' où t puis M_0H

Autre méthode: Soit A un point du plan
$\overrightarrow{M_0H}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AMo}$ sur la normale dirigée par $\vec{n}$
$<\overrightarrow{AMo}; \vec{n}> = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$
car A vérifie l'équation du plan

DISTANCE DU POINT Mo A LA DROITE passant par B dirigée par $\vec{u}$

$$MoH = \frac{||\overrightarrow{BMo} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$



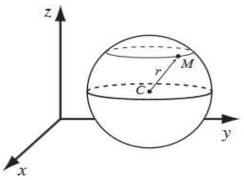
en utilisant $\overrightarrow{BMo} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HMo}$

$\overrightarrow{BH} \wedge \vec{u} = 0$ par colinéarité

et orthogonal à $\vec{u}$ donc $||\overrightarrow{HMo} \wedge \vec{u}|| = ||\overrightarrow{HMo}||\,||\vec{u}||$

SPHERE

sphère S de centre $C(\alpha ; \beta ; \gamma)$ et de rayon r



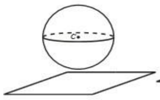
$$M(x ; y ; z) \in \mathbf{S} \iff \| \overrightarrow{CM} \| = r$$
$$\iff \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = r$$
$$\iff \boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = r^2}$$

l'équation **développée** $\boxed{x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0}$

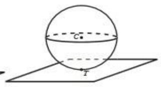
Exercice Déterminer le centre et le rayon de la sphère suivante : $x^2+y^2+z^2+4x-10y-2z-51=0$

Intersection sphère et plan

d est la distance entre C et le plan



cas d >R



cas d=R

plan est tangent à S

R > d

cercle de centre la projection de C sur le plan de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$

Exercice: intersection de la sphère S de centre C(1,1,1) de rayon 3 avec le plan 2x+2y+z = 1

Equation du plan tangent à S au point (1,1,4)

Intersection de 2 sphères

en faisant la différence des 2 équations développées on obtient un plan

S1=S2=0 $\iff$ S1=S1-S2=0 on est ramené à sphère inter plan, c'est un cercle

lorsque $|R1-R2| < d < R1+R2$ où d est la distance des centres

Si d= R1+R2 les 2 sphères sont tangentes extérieurement

si d = $|R1-R2|$ les 2 sphères sont tangentes intérieurement