Variable aléatoire discrete

1 Une urne contient des boules de 1 à n ; on tire 1 boule sans remise jusqu' à avoir un n° strictement supérieur à un des n° obtenus auparavant ou jusqu'à avoir toutes les n boules , X désigne le nombre de tirages .Trouver les valeurs de X .Calculer $p(X>k)$ puis la loi de X ,et E (X)

2 a)Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 0,1,2,…,n alors

$E(X)=p(X>0)+p(X>1)+\ldots+p(X> n-1)=p(X\geq 1)+p(X\geq 2) +p(X\geq 3) +\ldots+p(\geq n)$

b)On tire 1 boule , 3 fois avec remise dans une urne contenant les boules 1,2,3, …,n

X est le minimum des 3 n° , calculer E(X) .Puis trouver la loi de X

3 On répartit n boules au hasard dans 3 urnes, X est le nombre d'urnes vides.
X_i =1 si l'urne i est vide et 0 sinon ; calculer E(X) en utilisant les X_i .Puis Trouver la loi de X

4 on lance une pièce jusqu 'à avoir un total de 2 piles (resp un total de 3 piles, de n piles)

Loi de X , E(X) (la probabilité de faire pile est p)

5 Un couple a des enfants jusqu'à avoir au moins une fille et au mois un garçon ,

loi de X nombre d'enfants , E(X)

6 une urne contient n boules numerotées de 1 à n ;on tire une boule avec remise jusqu 'à avoir 2 numeros distincts ;loi de X, E(X)

7 Une urne a une boule noire et une blanche ; on tire une boule avec remise jusqu'à avoir une boule blanche , mais si on a une noire on rajoute une boule noire ; loi de X nombre de tirages ;E(X) ;

On pourra calculer $p(X>n)$ ou directement

8 on lance une pièce normale jusqu'à avoir 2 piles consécutifs , trouver la loi et l' espérance du nombre de lancers .

On montrera $Pn=p(X=n)=pq\ P_{n-2} + q\ P_{n-1}$ $p=q=1/2$

Calcul de E(X) en utilisant la relation , ou directement

9 si pour tout n , m on a $p(X=n+m/X>n)=p(X=m)$ montrer que X suit une loi géométrique de paramètre $p=p(X=1)$

10 le nombre d'années que dure une ampoule électrique suit une loi géométrique de paramètre p

a)On constate que 20% de ces ampoules durent strictement plus que 2 ans ; montrer que $p\approx 0.55$

b)Un lustre possède 5 ampoules , quelle est la probabilité de ne pas changer d'ampoules en 2 ans

c)Soit X le nombre d'années avant d'avoir à changer une ampoule

Montrer que X suit une loi géométrique de paramètre $p'=1-q^5$, et vérifier $E(X)\approx 1$

(remarquer que X est le minimum de X1,X2,X3,X4,X5 , Xi nombre d'années que dure l'ampoule i)

11 Calculer E(1/(X+1)), E(2^X)   pour X de loi de Poisson et binomiale

12 X suit une loi de Poisson montrer p(X pair) > p(X impair)

13 Fonction génératrice de X de loi de Poisson

14 Soit X a valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance

a)Montrer que $\sum_{k=0}^{n} p(X>k) = \sum_{k=0}^{n} kp(X=k) + (n+1)P(X>n)$

b)En utilisant le reste de la série de kp(X=k) montrer que $(n+1)P(X>n)$ tend vers 0

c) montrer E(X)= $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X>n)$

15 Au loto il s'agit de trouver 6 numéros parmi 49 ;

Il y a 7000 000 de personnes qui jouent ;calculer la probabilité que personne ne gagne , qu'il y ait plus de 3 gagnants ;comparer avec l'approximation par une loi de Poisson

16 X, Y de Poisson indépendante de paramètre $\lambda 1$ et $\lambda 2$ calculer p(XY pair)

17 On considère n cartes dont 4 as.On choisit une carte sans remise jusqu'à avoir un as.

X est la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages.Loi de x et E(X).

X prend les valeurs de 1 à n-3.

p(X=1)=4/n , p(X=2)= $\frac{n-4}{n}\frac{4}{n-1}$, p(X=3)= $\frac{n-4}{n}\frac{n-5}{n-1}\frac{4}{n-2}$

p(X=k)= $\frac{n-4}{n}\frac{n-5}{n-1}\frac{n-6}{n-2}\frac{...}{...}\frac{4}{n-k+1} = \frac{(n-k)!4(n-4)!}{n!(n-k-3)!} = \frac{\binom{n-k}{3}}{\binom{n}{4}}$

Montrer E(n+1-X) = $\frac{4}{\binom{n}{4}}\sum_{k=1}^{n-3}\binom{n-k+1}{4} = \frac{4\binom{n+1}{5}}{\binom{n}{4}}$ puis   E(X)=4(n+1)/5