Exercice 1

1/ $I_n= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} dx$

a) Existence de I_n pour n entier

b) calculer I_1

c)faire le changement de variable t=1/x

d)Déterminer la limite de I_n

2/Déterminer les réels a pour que $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable

cours : série alternée

Exercice 2

1/ rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+(-1)^n}$

2/A matrice réelle (n,n) telle que $A^2=-I$

a)Montrer n pair

b)Montrer det(A)=1

cours théorème de Dirichlet

Exercice 3

1/ Existence et équivalent de In = $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+nx^4}}$

Poser $t=x\, n^{1/3}$ on trouve $I_n \sim \frac{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^4}}}{n^{1/6}}$

2/a) Si A inversible réelle montrer que $N=\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est inversible et trouver son inverse

b)Si N diagonalisable montrer A aussi ; réciproque ?

cours : intégrale à paramètre

exercice 4

1/Développer en série entière $f(x) = \ln(1+x^2+x^4+x^6)$

2/A matrice carrée (n,n) de rang r

a)Trouver le rang de M= $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

b)Si A diagonalisable M est –elle diagonalisable ?

c)Si M est diagonalisable a-t-on A diagonalisable ?

cours : th limite derivee

exercice 5

1/Trouver f 2π périodique telle que pour tout réel x $f'(x) = f(x+\pi/2)$

2/ $\begin{pmatrix} I & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

exercice 6

1/ existence et calcul eventuel de I= $\int_0^{+} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ et de J= $\int_0^{+} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

On donne $\int_0^{+} \frac{\sin \ x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

2/Les matrices $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

Cours : intégrale à paramètre dérivée

Exercice 7

1/a)Existence de I= $\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, dt$ et de J= $\int_0^{+\infty} t \ln(t)\, e^{-t}\, dt$

b)Trouver une relation entre I et J

2/ a)montrer $\det(I + {}^tAA) \geq 1$

b)Si A antisymétrique $|\det(I+A)| \geq 1$

exercice 8

1)existence de $\int_0^{+\infty} \frac{arctg(t)}{t} \ln(\frac{2+t}{1+t})\ dt$

2)A symétrique définie positive et B antisymétrique alors A+B est inversible

Exercice 9

1/Soient f continue sur $\mathbb{R}$ et pour n entier n>0 $I_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx$

a/limite de $(1+1/n)^n$

b/Montrer que $I_n \to 0$.

c/ Déterminer la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$

2/Valeur propre et diagonalisation dans $\mathbb{R}$ de A = $\begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ m^{-1} & 0 & m \\ m^{-2} & m^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, m réel

Exercice 10

1/ $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

Etudier les séries (u_n) et $((-1)^n u_n)$

Utiliser $\left| \frac{1}{1+u} - (1-u) \right| \le u^2$

2/La famille $(1 , e^x \operatorname{th}x , e^x \operatorname{th}^2 x ,\dots, e^x \operatorname{th}^n x)$ est-elle libre ?

Oui on divise par exp(x) puis $x \to \infty$ puis polynome en th

Exercice 11

1/a)Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x^3+n^2}}$

b)Trouver la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^3}}$

a) poser $x=n^{2/3}t$
b) comparaison integrale

2/Etudier la diagonalisation dans $\mathbb{R}$ de A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & . & 1 \\ 1 & 1 & .. & & 1 \\ : & & & & : \\ 1 & .. & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Et trouver les valeurs propres

Exercice 12

1/f C^1 sur R à valeur dans R^{+*} et f ' <0 et f(0)=1

Soit $a_o=1$ et $a_{n+1} = a_n\ f(a_n)$

Nature de la suite et de la série (a_n)

(Pour la série Cesaro avec $1/a_{n+1} - 1/a_n$)

2/ $A^2=A$ et $B^2=B$ et $AB=BA$

Montrer que det(A-B) est 0 , 1 ou -1

(calculer $(A-B)^3$)

Exercice 13

1/ soit y C^2 sur $[0\,;\pi]$; si $y'' + y \geq 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $y(0)=y'(0)=0$

Montrer $y \geq 0$ sur $[0\,;\pi]$

2/A symétrique réelle (n,n) , ayant une valeur propre de multiplicité au moins 2 alors pour tout vecteur x $(x,Sx,S^2x,\ldots.S^{n-1}x)$ est liée

Exercice 14

1/ soit f C^2 sur $\mathbb{R}$, si $f'' + f$ paire et $f'(0)=0$ alors montrer f paire

2/u nilpotent de E , dimE=3

a)Montrer $u^3=0$

b)Si F est stable par u qui est nilpotent et si F + Imu=E montrer F =E

exercice 15

1/Si f continue 2 π périodique sur R et pour tout n $a_n(f)=0$ montrer f est impaire

car f(-x)=-f(x) car les mêmes coefficicents de Fourier

2/Montrer que tg n'est pas une fraction sur [0 ;π/2[

(y'=1 +y^2 puis degré dans $p'q-q'p=p^2+q^2$)

Exercice 16

1/Soit f C^1 2π périodique montrer que $\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,dt}$

(Cauchy-Schwarz , Parseval et c_n (f ') et $\sum 1/n^2 = \frac{\pi^2}{6}$)

2/ Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ $10^{10^n} \equiv 4\ [7]$

Exercice 17

1/ f,g continues paires 2π périodiques

h(x) = ao(f)ao(g)/2 + $\sum_{1}^{+\infty} a_n(f)\,a_n(g)\cos(nx)$

a)Montrer que h est définie ,paire 2π périodique continue sur R

b)est elle égale à sa série de Fourier

c)montrer que sup $|h(x)| \leq$ 2 sup $|f(x)|$ sup $|g(x)|$

utiliser pour a et b la convergence normale $2uv \leq u^2+v^2$

pour c) Cauchy Schwarz puis Parseval puis majorer avec les normes infinies

2/ soit p entier p >2 montrer (p-1) ! $\equiv$ -1 [p] $\Leftrightarrow$ p est premier

(Car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps)

Exercice 18

1/ $f(x,y)= (x^2-y^2) \, Ln(x^2+y^2)$
a) prolonger par continuité f
b)f est –elle alors C^1 sur $\mathbb{R}^2$

2/ a)Si A est antisymétrique montrer que $A+I_n$ est inversible

b)quelles sont les matrices réelles antisymétriques et diagonalisables ?

Exercice 19

1/ résoudre $y'' + y = 1/\sin(x)$ pour $x \in]0 ;\pi[$

2/ Etudier si $A=\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

Exercice 20

1/ résoudre $y'' -6y' + 9 y = \dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$

$$y(x) = \mathbf{e}^{(3\,x)}\_C2 + \mathbf{e}^{(3\,x)}\,x\_C1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(3\,x)}\,(-\ln(1+x^2) + 2\arctan(x)\,x)$$

2/a)Trouver les nombres entiers positifs qui ont exactement 3 diviseurs

b)Calculer le produit des diviseurs de n en fonction de N le nombre de diviseurs

a) c'est le carré d'un nombre premier
b)regrouper d et n/d on trouver $n^{N/2}$

Exercice 21

1/Soit f continue sur $\mathbb{R}$ de période 1 ,on pose $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,dt$

Montrer que la série (u_n) converge ssi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$

Car $u_n=\dfrac{\int_0^1 f(t)\,dt}{n} + O(1/n^2)$

2/Trouver les entiers n >1 tels que 1 !+2 !+3 !+…+n ! est carré

(n=3 , sinon modulo 5 n'est pas un carré)

Exercice 22

1/ n entier ,n>0 , existence de $I_n = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+n} + e^{3-x}}$

puis calcul de I_1
puis lim I_n

puis série et équivalent c'est $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+n}}$

(pour I_1 poser t=exp(x-1) , pour la limite poser x=nt et majorer)

2/Soit a $\in$]0 ;π/2n[

Trouver les racines de P(X)= $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \sin(ka)$

Exercice 23

1/a)existence de I= $\int_0^{+\infty} \frac{x}{sh(x)} dx$

b)Montrer I= $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

2/ n entier n>1 alors n ne divise pas 2^n -1

(si p est le plus petit premier qui divise n on regarde l'ordre de 2 modulo p)

Exercice 24

1/ao=0 , a_1=1 et $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n+(-1)^n$ f(x)= $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif
Puis trouver f puis a_n

2/ Montrer que $2^n + 1$ n'est pas un cube

Factoriser x^3-1 d'où x-1=2^p et x^2+x+1=2^q puis parité

Exercice 25

1/ f C^0 sur [0 ;1] non nulle

a) Pour n>0 calculer $I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{x+(1/n)} dx$ et sa limite

b) Si $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^2} dx$ existe montrer que L= $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$ existe

puis trouver la limite J de $J_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+(1/n)} dx$

puis un équivalent de $J_n - J$

2/Si M est une matrice de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M^2$
montrer que M est une matrice de rotation et trouver son angle

Exercice 26

1/soit f C^1 sur $\mathbb{R}+$, f(0)=0 et f bornée sur $\mathbb{R}+$, f non nulle

a)Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2} dx$ existe

b)Déterminer la limite L de $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2 + e^{-n}} dx$

c)Equivalent de $\int_0^{+\infty} \frac{f^2(nx)}{x^2} dx$

2/soit A $\in$ Mn($\mathbb{R}$) diagonalisation de $M \in Mn(\mathbb{R}) \to M + tr(M) A$

Exercice 27

1/ résoudre $(x^2+1) y' - 2x y = x \exp(\frac{1}{1+x^2})$

2/limite de la suite puis nature de la série $u_n = \int_0^1 \sin(x^n) dx$

3/ dimE=3 , $u \in L(E)$ $u^3 = u^2$, $u^2 \neq 0$ et rg(u)=1
montrer qu'il existe une base où la matrice de u est E_{11}

Exercice 28

1/Pour x >0 existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+x)-\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$

Poser u=x/t puis par parties

2/ a)si B= $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$, trouver rg(B) en fonction de rg(A)

b)Si A=I_n , B est –elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Exercice 29

1/ existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}}\,dt$

2/<P,Q>= $\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Montrer qu'il existe A $\in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $P(0)=\langle A ;P\rangle$

et montrer que A a n racines dans]0 ;1[

Exercice 30

1/a)existence et calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} t\,e^{-nt}\,dt$

b)existence et calcul de $J = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{1-\exp(-\sqrt{t})}\,dt$

2/ soit A symétrique réelle montrer qu'il existe une matrice M symétrique telle que $M^3 + 2M = A$

Exercice 31

1/ Nature de la suite et série $u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n}\cos(u_n)$

2/si $P^2=P$ Etudier la diagonalisation de L : $M \in M_n(\mathbb{R}) \to PM+MP$

Calculer L^2

Exercice 32

1 / a)limite de la suite $\ln^2(n)+2\ln(2)\ln(n) - \ln^2(2n+1)$

b) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ montrer que la suite $u_n = s_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$ converge

c)Montrer que la série ($\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$) converge

d)Montrer que la somme de la série est $\gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$

(la somme partielle de 1 à 2n+1 est $H_n \ln 2 + s_n - s_{2n+1}$ en se débarrassant des impairs)

Pour le a) la limite est $-\ln^2 2$

2/Si A $\in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$ AXA=0 montrer A=0

($A=PJ_rQ$ ou si f non nul il existe g tel que $fgf \neq 0$)

Exercice 33

1/ a)Existence de $u_n = \int_0^1 \ln(1-t^n)\,dt$

b)equivalent de la suite (u_n)

c)Nature de la série (u_n)

on pose $u=t^n$

$\ln(1-t)\leq\ln(1-t^n)\leq 0$

2/a)Soit A est inversible et $\|Ax\|\leq\|x\|$ pour tout vecteur colonne x

montrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ dans]0 ;1]

b) Est-ce que ${}^tAA$ est diagonalisable ? Montrer que $sp({}^tAA)=sp(A{}^tA)$

c)Montrer que $\|{}^tAx\|\leq\|x\|$

Exercice 34

1/existence et calcul de $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{ch^2 t}dt$

2/a) que savez vous sur les rotations vectorielles en dimension 2 , 3 ?

b) soient B=(a,b,c) et B'=(a',b',c') deux bases othonormée directes montrer que (a-a',b-b',c-c') est liée

Car dans le plan Im(f-id) ou f rotation qui envoie B sur B'

Exercice 35

1/ $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\exp(-\sqrt{nx})}{\sqrt{n+1}}$

Domaine de définition , continuité , dérivabilité

Limite de f en 0+ et en $+\infty$

(comparer à une intégrale en $+\infty$)

2/Soit A symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$

Montrer que $f:X\in M_n(\mathbb{R})\to AXA$ est diagonalisable

(f est symétrique avec $<X ;Y>= tr({}^tXY)$)

Exercice 36

1/soit $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}dx$

a)Etudier la suite (u_n)

b)Etudier la série (u_n)

c)Montrer que $\exp(x)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\exp(x)/(n+1)$!

d)Equivalent de la suite (u_n)

2/Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur vect$(1,X^2)$

dans la base $(1,X,X^2)$ avec <P,Q>= $\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Exercice 37

1/ f(x)= $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$

a)Montrer que est f est définie et continue sur[-1 ;1]
b)montrer f dérivable sur]-1 ;1[et donner sa dérivée.
c)Etudier la dérivabilité en 1
d)montrer que f(x)+f(1-x)+lnxln(1-x) est une constante sur]0 ;1[

2/Déterminer les matrices réelles (n,n) M telle que $M+{}^tM$ soit nilpotente

Exercice 38

1/soit f(x)= $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}\ dt$

a)montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
b)Montrer que f est C^2 et calculer f'' $=1/(1+x^2)$
c)calculer $f(x)=x\mathrm{arctg}(x)-(1/2)\ln(1+x^2)$

2/B = X^3-X^2+X-1 , $A=(X^2+X+1)^{2n}-X^{2n}-X^n-1$
Trouver le reste de la division de A par B

Exercice 39

1/soit $n\in\mathbb{N}$ $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^n+\frac{1}{x^n}}}$

a)Existence de I_n
b)limite de la suite (I_n)
c)Equivalent de la suite (I_n)

2/

a)Montrer que le rang d'une matrice réelle est le même dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$
(prendre partie réelle et imaginaire)

b)soit u endomorphisme de E $\mathbb{R}$ -ev , dimE=n , tel que $u^3=-u$ montrer que rg(u) est paire

Exercice 40

1/soit pour n entier $I_n = \int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x^n}dx$

a)existence
b)limite de la suite
c)calcul de I_1 avec une série

2/Etudier la diagonalisation de la matrice (n,n) $a_{ij}=(-1)^i$

Exercice 41 (MP)

1/soit la suite $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{nu_n}$ avec $u_1=1$

a)Montrer que la suite tend vers $+\infty$

b)Nature de la série $1/u_n$

c)Equivalent

$u_n^2 \leq 2n$, $u_{n+1}^2-u_n^2 \sim 2/n$

2/a)rotation orthogonale d'axe (1,0,1) et d'angle $\pi/2$

b)Est –elle diagonalisable ?

Exercice 42

1/soit $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)\,dt$

a)existence

b)derivée

c)trouver f on donne $f(1)=-\gamma$

2/ Déterminer les matrices M réelles (n,n) vérifiant

$$2M = I_n+{}^tMM$$

M est symetrique

Exercice 43

1/soit $I_n=\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{1+t^n}\sqrt{1-t}}\,dt$

a)existence

b) limite et calcul de la limite

(poser $x=\sqrt{1-t}$)

2/trouver la projection orthogonale de la matrice I_n sur les matrices de trace nulle dans $M_n(\mathbb{R})$

Muni du produit scalaire usuel $\langle X,Y\rangle=tr({}^tXY)=\sum_{1\leq i,j\leq n} x_{ij}y_{ij}$

Exercice 44

1/soit $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-t)^n}{(2^n n!)^2}$

a)montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b)f est –elle C^∞ sur R?

c)On pose g(t)=f(t)exp(-t) existence et calcul de I= $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$

2/Projection orthogonale de X^n sur vect(1,X) avec <P,Q>= $\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Exercice 45

1/f(x)= $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{1+t^2}\,dt$

a)existence,parité

b)f(1)

c)limite de f en +∞

d)f'(x)

e)f(x)/x tend vers+ ∞ en 0^+

(pour e) poser u=xt puis minorer par l'integrale entre 0 et 1 , et minorer arctg(u) par u/2)

2/ Calculer le déterminant de la matrice (n,n) A où a_{ii}=i et a_{ij}=1 si i≠j

Exercice 46

1/soit I_n= $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,dx$

a)Existence

b)Limite de la suite (I_n)

c)Equivalent

d) série (u_n)

(par convergence dominée nI_n tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$)

2/Soit f de matrice A=$(i+j)_{1\le i,j\le n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

On pose e1=(1,1,…,) et e2=(1,2,3,….,n)

a)trouver rg(A)

b)trouver Imf

c)f est –elle diagonalisable ? Trouver les valeurs propres de f

(Calculer f(e1) et f(e2) en fonction de e1 et e2)

Exercice 47

1/a)Développer en série de Fourier f 2π périodique f(x)=|x| sur [-π,π]

b)déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$

2/Montrer que l'application f qui à P de E=$\mathbb{R}_n$[X] associe $e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}P(t)\,dt$ est un endomorphisme de E

Puis trouver sa matrice dans la base B=($1,X,\dots,X^n$).Est ce que f est diagonalisable ?

Poser u=t-x

Exercice 48

1/Soit f :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que pour tout (x,y) $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{4}|f(x)-x| + \frac{1}{4}|f(y)-y|$

a)Montrer que f admet au plus un point fixe
b)Montrer que la suite $u_{n+1}=f(u_n)$ converge vers un point fixe

etudier la série ($u_{n+1}-u_n$) en comparant avec $(k/(1-k))^n|u_1-u_0|$ où k=1/4

2/ soit A= $\begin{pmatrix} 0 & & .. & 0 & 1 \\ : & & & : & 2 \\ & & & & : \\ 0 & & .. & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & .. & n-1 & n \end{pmatrix}$

trouver les valeurs propres .Est ce que A est diagonalisable ?

Exercice 49

1/f(x)= $\int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$

a)Dérivabilité et variation sur $\mathbb{R}+^*$
b)Montrer que f est prolongeable en 0 ;etudier la dérivabilité
c)Primitive de $\ln(t)/t^2$
d)Montrer que f a une limite finie à trouver en $+\infty$

2/Soit P une matrice réelle (n,n) de projection orthogonale
Montrer que $\sum_{1\leq i,j\leq n} |p_{ij}| \leq n\sqrt{rg(P)}$
D'abord $\sum_{1\leq i,j\leq n} |p_{ij}|^2 = rg(P)$

Exercice 50

1/a)Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{arctg(t)}{1+t^2} dt$
b)Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{arctg(t)}{(1+t^2)^2} dt$

pour le b) poser t=tg(u) ,on trouve $\pi^2/16 \; -1/4$

2/ $E=C^2([0;1])$ et $<f;g>= \int_0^1 (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,dt$;

Soient $F=\{f\in E \mid f(0)=f(1)=0\}$ et $G=\{f\in E \mid f''=f\}$

a)Montrer < ;> est un produit scalaire

b)dimG

c)Montrer $F\perp G$

d)Montrer que $E=F\oplus G$

e)Déterminer la projection orthogonale de f sur G