DIAGONALISATION

1/On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, $P(X) \to P(X+1) + XP'(X)$.

a)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

b)Déterminer sa matrice dans la base canonique de Rn[X]

c)Montrer que F est diagonalisable

d)Trouver une base où la matrice de F est diagonale

2/F : $P \in \mathbb{R}_2[X] \to P(X)+XP'(X+1)$

a)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

b) Déterminer sa matrice dans la base canonique de Rn[X]

c)Montrer que F est diagonalisable

d)Trouver une base où la matrice de F est diagonale

3/Etudier la diagonalisation de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, de $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4/$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\mathrm{Mat}_B\, f$ Trouver le noyau et l'image

Montrer que A est semblable à E_{12} soit montrer qu'il existe une base B' où la matrice de f est E_{12}

5/ Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est semblable à E_{23}

6/

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i & 1+i \\ -1-i & -i & -1-i \\ -2i & -2i & -i \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.
Pour λ appartenant à $\mathbb{C}$, il est conseillé de commencer par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ sur la matrice $A - \lambda I_3$ puis de distinguer deux cas selon que $\lambda = -i$ ou $\lambda \neq -i$.

b) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

c) Montrer que la matrice A est diagonalisable,
et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

d) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que : $D^k = I_3$, k sera choisi le plus petit possible.

7/Etudier la diagonalisation de $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ où a,b entre 0 et 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

8/ montrer que A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables ; sont –elles diagonalisables ?Calculer A^n

9/Pourquoi A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ? diagonaliser et Résoudre X'=AX

10/ Diagonaliser **A=**$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis trouver X tel que AX=XA