$\boxed{\text{Determinants}}$

1/Calculer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & a_2 \\ a_1 & a_1 & .. & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$

2/ Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{vmatrix}$

3/a)$a_{i,j} = min(i,j), 1 \leq i,j \leq n$ calculer det(A)
b)$b_{i,j} = max(i,j)$ montrer det(B)=$(-1)^{n-1}n$

4/Si det(A+X)= det(A)+det(X) pour toute matrice X montrer A=0

5/ si $a_{i,j} \in \{1,-1\}$ montrer que detA est un entier divisible par 2^{n-1}

6/ Calculer par 2 méthodes :par multilinéarité
par opérations élémentaires

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 1+a_2 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

7/ Calculer par multilinéarité ,en décomposant le premier vecteur colonne

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 1 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & 1 & & 2 \\ \vdots & & & & \\ 2 & 2 & .. & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

8/Montrer $det(| i-j |) = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

9/calculer le déterminant de $f : X \in M_n((R) \rightarrow X + tr(X)I_n$

10/ Calculer $det(A - xI_n)$ où a) A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 1 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) A est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & .. & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & a_2 \\ 0 & .. & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & .. & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ (matrice compagnon)

11/Calculer $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & & & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

12/ Calculer det((i+j)) (matrice (n,n))

13/Déterminant d'une matrice triangulaire bloc : A,B,C matrices blocs ,A et B carrées alors
$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = det(A)det(B)$

14/Calculer $\begin{vmatrix} 4I_n & 2I_n \\ 3I_n & I_n \end{vmatrix}$

15/A matrice carrée réelle montrer $det(A^2 + I_n) \geq 0$

16/ Si A est une matrice réelle (n,n) et $A^2 + A + I_n = 0$ alors n est paire

17/Si A $\in M_n(\mathbb{R})$ et J de rang 1 montrer $det(A + J)det(A - J) \leq det(A^2)$
(utiliser J équivalente à E_{11} et la multilinéarité)