DERIVATION

1/Dériver a)$\sqrt{x^2+\mathrm{Arctg}(e^x)}$ b) sin(Arctg(x)) c)$\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1+\mathrm{Ln}(1+x^2)}$ d)$\dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

e)$\mathrm{argch}(\sqrt{1+x^2})$ f) $x^{\mathrm{Arctg}(x)}$ g) Arg sh(Arcsin(x)) h)arctg[x sin(a)/(1- x cosa)]

2/Prolonger en 0 et étudier la dérivabilité en 0^+ a) $x^{1/x}$ b) exp(-(x+1/x)
c) $1+x+x^3\sin(1/x)$ d) $\sin^2(x)/x$

3/Dérivée n ième de a) sh(x) sin(x) b) x ln(x) c) $\dfrac{e^x}{x}$ d)$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ e) x $\sin^2(x)$

f)$(x-x^3)\cos(x)$ g) $x^{1/2}$ h) $\cos^3x+\sin^3x$ i) $x^n/(1+x)$ j) $(x^2+1)\exp(2x)$

4/a)Montrer que la dérivée n de f(x)=1/cos(x) est de la forme
$\dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$ où P_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant ,la parité et la somme des coefficients.

b)f(x)= $\sqrt{x^2-1}$ pour x>1 montrer que $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme dont on donnera le degré et le coefficient de plus haut degré
en dérivant $(x^2-1)f'(x)=x f(x)$ trouver une récurrence entre P_{n+1},P_n et P_{n-1}

5/Si $f'(x)\to 1$ en $+\infty$ alors $f(x)\to +\infty$ en $+\infty$

6/Soit f positive telle que $f'(x)/f(x)\to 1$ en $+\infty$ alors $f(x+1)/f(x)\to e$ en $+\infty$
(utiliser ln(f(x)))

7/Soit f C^2 sur [a;b] avec f(a)=f(b)=0 .Soit $x\in]a;b[$
En utilisant le théorème de Rolle avec $g(t)=f(t)-A(t-a)(t-b)/2$
où A est défini par g(x)=0 , montrer qu'il existe c tel que $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(c)$

8/Soit P un polynôme,montrer que l'équation $P(x)=e^x$ a un nombre fini de solutions.

9/Déterminer les fonctions dérivables telles que a) pour tout x $f(2x)=2f(x)$
b)Pour tout x,y $f(x+y)-f(x-y)=2y\,g(x)$ f,g C^0 (montrer que f ’et f’’ existent et dériver)
c)$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ f C^2 sur R (trouver f(0) ; si f(0)=0 montrer f=0 ;
sinon f(0)=1 et f ’(0)=0 et f paire ; dériver 2 fois en x et en y et déduire f ’’= a f)

10/Soit f C^2 sur R a)Si f et f '' sont bornées sur R alors f ' aussi .On pose $M_i=\sup\left|f^{(i)}\right|$
b)En utilisant Taylor Lagrange entre x, x+h et x, x-h montrer que
$|f'(x)|\le\dfrac{M_o}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$ déduire que $M_1\le\sqrt{2M_oM_2}$

11/Etudier la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour f de classe C^2 sur [0 ;1] et f(0)=0

12/f C^2 montrer qu'il existe c tel que $f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)=h^2 f''(c)$
utiliser $t \to f(x)-2f(x+t)+f(x+2t) - A t^2$ puis Rolle et accroissement finis

13/$f(x)=\exp(e^x)$ calculer f ' puis en utilisant Leibniz montrer que pour tout n $f^{(n)} > 0$

14/$\cos(\sqrt{x})$ est –elle C^1 sur R^+ ?

15/Si f ,g sont dérivable sur [a,b] et si $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) \neq 0$ alors $g(b)-g(a) \neq 0$
et montrer qu'il existe c tel que $(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)) = f'(c)/g'(c)$

16/f C^1 sur $[a;+\infty[$ $\lim f(x)=f(a)$ pour $x \to +\infty$ montrer qu'il existe c tel que $f'(c)=0$
(par l'absurde)

17/Etudier $u_{n+1} = f(u_n)$
*théorème point fixe si on pense que u_n tend vers L avec $|f'(L)| < 1$
<u>ex 1</u> Soit $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$
On donne $4/e \approx 1,4715$, $f(4/e) \approx 1,402$, $f(2) \approx 1,21$, $f(3) \approx 0,8$
1/a)Donner $f'(x)$ et le tableau de variation de f
b)Montrer $f(x)=x$ a une unique solution $a \in]1 ; 4/e[$; on donne $a \approx 1,416$
c)Tracer le graphe de $y=f(x)$ avec celui de $y = x$
2/On étudie la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in R$
a)Montrer qu'on a $0 \leq u_2 \leq 4/e$ puis que $1 \leq u_3 \leq 4/e$
b)montrer que pour $n \geq 3$, $1 \leq u_n \leq 4/e$
c)Montrer que pour tout $x \in [1 ; 3/2]$ $|f'(x)| \leq 1/2$
d)montrer que la suite (u_n) converge

<u>ex 2</u> $f(x)=e^x/(1+e^x)$ $I=[0 ;1]$ $k=1/4$

<u>ex3</u> $u_0 \in [0;1]$ $u_{n+1} = 1/(1+u_n)$ a) montrer $1 \geq u_n \geq 1/2$ pour $n \geq 1$ puis majorer $|f'(x)|$ et conclure

methode 2 : en utilisant u_{2n} et u_{2n+1} et fof

18/Résoudre par changement de variable
$x y'' - y' + 4 x^3 y = 0$ avec $t=x^2$

19/ si $f'' \geq 0$ sur I montrer que la courbe est au dessus de la tangente

20/ si f ' décroit montrer $f(x+1)-f(x) \leq f'(x) \leq f(x)-f(x-1)$