Continuité

1/Déterminer les fonctions f continues sur R qui vérifient pour tout réel x :
a)$f(2x) = f(x)$ b)$f(2x+1)=f(x)$ c) $f(2x)=f(x)+3x^2$ d) $f(2x) = f(x)\, e^x$
e)$f(\sin x) = \cos(f(x)) + x$ f) $f(f(x)) = -x$ g) si fofof=id alors f=id
h)$\forall x \geq 0$ $f(x) = f(x/2) + x/(x+1)(x+2)$

2/Déterminer les fonctions f continues sur R qui vérifient pour tout x ,y :
a)$f(x+y)=f(x)f(y)$ b)$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) + 1$
c) $f((x+y)/2)=(f(x)+f(y))/2$ ($g(x)=f(x)-f(0)$ est additive)

3/Si f est continue sur [0;1] et f(0)=f(1) , montrer qu'il existe x tel que
a) $f(x+ 1/2)=f(x)$ b) $f(x+\frac{1}{3}) = f(x)$ c)$f(x+\frac{1}{n})=f(x)$ n entier fixé
d)Une voiture parcourt 80 km en une heure montrer qu'il existe un intervalle de tempsd'une demi heure pendant lequel la voiture parcourt exactement 40 km
e)Soit $f : R^+ \to R^+$ continue telle que $f(x)/x \to 1/2$ en $+\infty$
montrer qu'il existe x tel que $f(x)=x$

4/si I=[0 ;1] , f continue sur I et $I \subset f(I)$ alors il existe $x \in I$ tel que $f(x)=x$

5/Si f et g sont continues sur [a;b] et si $\forall x \in [a;b]$ $f(x) > g(x)$
alors $\exists$ m>0 $\forall x \in [a;b]$ $f(x) > g(x) + m$

6/Si f et g sont continues sur [a ;b] et à valeurs dans [a ;b]
et si fog=gof alors il existe x tel que f(x) =g(x)
Par l'absurde : sinon par exemple f(x)>g(x) pour tout x
a)Montrer qu'il existe m>0 tel que f(x)>g(x)+m puis fofo…of(x)> gogo…g(x)+nm (avec n fois f,g) déduire une contradiction.
b)Autre méthode : montrer qu'il existe c , g(c) =c ; puis soit u_n=fofo..of(c), montrer que $g(u_n)=u_n$, puis que (u_n) croit et converge , soit L sa limite , déduire une contradiction.

7/f,g continue sur [a ;b] et supf =sup g montrer $\exists$ x $\in$ [a ;b] f(x)=g(x)

8/Si f continue sur R^+ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$
alors f est minorée sur R^+ et il existe c tel que inf f(x) =f(c)

9/ Soit $f: x \to \mathrm{Ln}(x) + e^x$
a)Montrer que f est une bijection de R^{+*} dans R
b)Montrer que f^{-1} est continue et tracer son graphe
c)Montrer que $f^{-1}(x) \sim \mathrm{Ln}\, x$ si $x \to +\infty$ et que $f^{-1}(x) \sim e^{x-1}$ en $-\infty$
d)De même avec $f(x)=2x+\ln(x)$

10/ f est continue sur R et $|f(x)|$ tend vers L en $+\infty$, montrer que f (x) a une limite en $+\infty$