NOMBRES COMPLEXES

1/Partie réelle et imaginaire de a) $\dfrac{1}{1-x e^{i\theta}}$ où x est réel b) $\dfrac{1}{1+(1-i)^n}$ n entier

c) $\min\limits_{x\in R}$ |z-x| =|z-Re(z)| d) Montrer $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \le \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$ e) $|1+a|+|a+b|+|b|\ge 1$

2/Calculer a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\cos(kx)}{2^k}$ puis limite pour n→+∞

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(n+\binom{n}{k})\sin(kx)$ c)Simplifier $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2 kx$

d) Résoudre sin(x)+sin(3x)+sin(5x)+sin(7x)=0 e) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\cos kx}{\cos^k x}$ f) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \sin(kx)$

g) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(ka+b)$

3/j=$e^{\frac{2i\pi}{3}}$ $j^2=\bar{j}=1/j$ et $1+j+j^2=0$

en utilisant $(1+1)^n$,$(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ calculer $\sum\limits_{0\le k\le n/3}\binom{n}{3k}$

4/Résoudre dans ℂ a) $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$

b) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$

c)$(z+1)^n + (z+1)^{-n} = 1$ d) $2z^n + i z^{2n} - i = 0$ e)$z^3=-8i$

f)Déterminer la forme algébrique des complexes z vérifiant

$1+\dfrac{z}{z+i}+\left(\dfrac{z}{z+i}\right)^2+\dots+\left(\dfrac{z}{z+i}\right)^n = 0$ g) exp(z)= -2

h) Forme trigonométrique de U= $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ puis résoudre $z^n=U$

pour $\theta\in[0;2\pi[$ (il faudra distinguer $\theta\in[0;\pi[$ ou pas)

i) $z^n + z^{n-1}+z+1=0$ (factoriser)

5 / ABC triangle ;onconstruit à l'exterieur les carrés ABDE et BCFG

Montrer que le triangle est isocèle de sommet B (BA=BC) ssi (DG) // (AC)

6/Pour un triangle inscrit dans un cercle l' angle au centre est le double de l'angle au sommet.

7/l'aire du triangle construit sur a,b,c est $|\mathrm{Im}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)|/2$

8/Résoudre le système $|z|=|z-2|$ et arg(z) =arg(z+3+i)

9) Montrer que f :z →z/(1+|z|) est une bijection de C dans un ensemble à préciser et trouver f^{-1}

10)a) Résoudre le système x + y = 2π/3 et sin x + sin y = 3/2

b) resoudre $3^{1/2}\cos x + \sin x + 2 = 0$,

c) montrer que $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

11/ soit f(z)=z(1-z)

a)f est -elle injective, surjective? b)Montrer f(D)⊂D où D={z∈ℂ| |z- (1/2)| ≤ 1/2 }