ALGEBRE LINEAIRE

1/Dire si F est un sev de E et trouver la dimension de F

a) $F=\{ P\in R_n[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$

b)$F=\{P\in R_{2n}[X] \mid P(-X)=P(X)\}$, $E=R_{2n}[X]$

c)$F=\{P\in R_{2n}[X] \mid P \text{ paire et } P(1)=0 \}$, $E=R_{2n}[X]$

d)$F=\{P\in R_n[X] \mid P \text{ est scindé sur } R\}$, $E=R_n[X]$

e)$F =\{f \in C^0([0,1]) \mid$ la restriction de f à [0;1/2] et à [1/2;1] sont affines}

f)Dim(vect($1/x$;$1/(x-1)$;$1/(x+1)$;$1/(x^2-x)$;$1/(x^2-1)$;$1/(x^3-x)$));

g)F est formé des matrices (3,3) symétriques et de trace 0

2/a)Trouver DEUX supplémentaires de a) $F=\{ P\in R_3[X] \mid P(0)=P(1)=0\}$ dans $R_3[X]$ b) des matrices (3,3) triangulaires supérieures

3/A,B,C sev et $B\subset A$ montrer que $A \cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C)$

4/Si $E=A\oplus B$ et $A\subset C$ montrer que $C=A\oplus(B\cap C)$

5/ F, G sev de E montrer $F\cup G$ sev $\Leftrightarrow F\subset G$ ou $G\subset F$

6/Etudier l'indépendance des vecteurs suivants

a) $|x|,|x-1|,|x-2|$ b) f(x),f(x+1),f(x+2) si $f(x)=e^x$ ou Ln(x) ou sin(x)

c) $\sin^m(x)$ $0\le m \le n$ d)$\sin(x^m)$ $1\le m \le n$

e) $x^m(1-x)^{n-m}$ $0\le m \le n$ f)$|x + m|$ $0\le m \le n$

g) $a_1 <a_2 <\ldots<a_n$ $(\exp(a_i x))$ est libre

7 /A, B sont 2 polynomes de degré 2

Montrer $\exists (P,Q) \in R[X]^2$ $A P+ BQ =1 \Leftrightarrow (A , B, XA , XB)$ libre

(Pour la réciproque on pourra utiliser l'espace vectoriel $R_3[X]$)

8/ $P_k=x(x-1)(x-2)..(x-k+1)/k!$ montrer $P(Z)\subset Z \Leftrightarrow$ P combinaison linéaire des P_k à coefficients dans Z

9/ a) F sev de E et F distinct de E.Montrer qu'il existe une base de E formé de vecteurs n'appartenant pas à F

b)F sev de R[X] de dimension n , montrer qu'il existe une base formée de polynomes de degrés tous distincts ; puis une base de polynômes ayant le même degré (centrale)

10/a)noyau et image de $P\in R_n[X] \to(X^2+X)P(1)+(X^2-X)P(-1)$

b)Noyau et image $\Delta:P\in R_n[X] \to P(X+1)-P(X)$

c)Noyau et image de Δ^2

d)Déterminer $F^k(P)$ où F: $P(X)\to P(X+1)$ puis déterminer $\Delta^m (P)$

e)Montrer que $\Delta^{n+1}=0$

11/f endomorphisme de E ,DimE=n; Ker(f)=Im(f) $\Leftrightarrow f^2=0$ et n=2rg(f)
Montrer qu'il existe f endomorphisme de E tel que Imf=Kerf ssi dimE pair

12/f endomorphisme de E de dimension finie n

a)Si pour tout x il existe m tel que $f^m(x)=0$ alors f est nilpotent

b)Si $f^m(x)=0$ et $f^{m-1}(x)\neq 0$ alors $(x,f(x),f^2(x),...,f^{m-1}(x))$ est libre donc $m \leq n$

c)Si DimE=3 et $f^4=0$ alors $f^3=0$

d)Si dimE=3 montrer $rg(f^3)=rg(f^4)$ (montrer par l'absurde que $\ker f^3=\ker f^4$)

13/f,g endomorphismes de E de dimension n
si $f+g \in GL(E)$ et fog=0 alors rg(f)+rg(g)=dimE

14/dimE=n ,$f\in End(E)$ montrer:
$E=Kerf\oplus Imf \Leftrightarrow Imf=Imfof \Leftrightarrow Kerf=Kerfof \Leftrightarrow rg(f)=rg(f^2)$

15/ a)Si fog=gof montrer que $f(Img) \subset Img$ et $f(kerg)\subset Kerg$

b)si fog=g et gof=f montrer que rg(f)=rg(g)

16/a)montrer $rg(fog)\geq rg(f)+rg(g)-dimE$ en utilisant la restriction de f à Img

b) U :$E\to F$;G sev de F montrer $Dim\, u^{-1}(G)=dimkeru + dim(Imu \cap G)$

c)Montrer que $dimKer(uov) \leq dimKer(u)+dimKer(v)$; puis $\dim kerf^k \leq k\, dimkerf$
(utiliser la restriction $\tilde{u}$ de u à Im(v) ,déterminer $Ker\tilde{u}$ et $Im\, \tilde{u}$)

d)$f \in End(E)$ et dimE=3 et $f^2=0$ et f non nul Montrer que rg(f)=1

17/ $u \in End(E)$ montrer
$Im(u^p)=Im(u^{p+1}) \Leftrightarrow Ker(u^p)=Ker(u^{p+1}) \Leftrightarrow E=Keru^p \oplus Im\, u^p$

18/a)Montrer que $F=Vect(X^n)$ et $G=\{P\in R_n[X] \mid \int_0^1 P=0\}$ sont supplémentaires dans $R_n[X]$ et déterminer la projection du polynôme P sur G parallèlement à F

b) p,q sont deux projecteurs montrer que p+q est un projecteur ssi pq=qp=0 ssi $Im\, p\subset Kerq$ et $Im\, q\subset Ker\, p$; préciser alors le noyau et l'image de p+q

c)Montrer que poq=p et qop=q ssi p et q projecteurs de même noyau
d)p, q projections telles que poq=qop et Imp=Imq alors p=q

19/ Si F, G sont des sev tels que dimF+dimG=DimE alors
il existe $f \in L(E)$ tel que kerf=F et Imf=G
20/ si E de dimension finie , $f \in End(E)$, G sev et $G\subset f(G)$ alors f(G)=G

21/Soient $f \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, $g \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$, $h \in L(\mathbb{R}^3)$,on suppose $h=fog$ et $rg(h)=2$
Montrer que $rg(f)=rg(g)=2$

22/Montrer que si E est de dimension finie et f, g endomorphismes on a

a) $Imf \subset Img \Leftrightarrow \exists\, h \in End(E)$ $goh=f$
b) $Kerf \subset Kerg \Leftrightarrow \exists\, h \in End(E)$ $hof= g$
c) Montrer qu'il existe h bijection linéaire telle que $g=hof$
   si et seulement si $Kerg=Kerf$