POLYNOMES -FRACTIONS

1/Calculer a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ b) $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

2/Reste de la division
a)de $(x^2+x+1)^n$ par x^2-1
b) de x^{3n} par x^2+x+1
c)de $(x\sin(\alpha)+\cos(\alpha))^n$ par x^2+1, par $(x^2+1)^2$
d)Reste de $X^{2n}+X^n+1$ par X^2+X+1
e)reste de $X^{100} + X^{50} -1$ par $X^2 +1$
f)de X^n par $(X-1)^2X$

3/a)Montrer que $(x^2+x+1)^2$ divise $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} -1$
b)montrer que $x^2-2x\cos(a)+1$ divise $x^{2n}-2x^n \cos(na) +1$
c)Trouver a,b pour que X^2+X+1 divise $X^{2n}+aX^n+b$

4/Déterminer les polynômes P tels que
a)$P(x^2)=(x^2+1) P(x)$ b) $x P(x+1)=(x+3)P(x)$ c) $P(x+1)=P(x) +x$
d)P' divise P e) $P(1)=P'(1)=1$ f) $P(x^2) =P(x)^2$ g) $P(x^2)=P(x)P(x-1)$
Montrer que j et j^2 sont les seules racines de même multiplicité
h) $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ et $P(0)=0$ i) $\forall k \in N$ $\int_k^{k+1} P(t)dt = k$
j)$x^2 P''(x) -(x+1) P'(x) +P(x) =0$ k)$P(x-1)-P(x) = x^2$

5/Trouver les polynômes bijectifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

6/$P(x)=(x+1)^{2n} - (x-1)^{2n}$
a) trouver d° P ,le coefficient dominant et le coefficient constant
b)Factoriser p dans C[X] puis dans R[X] c) déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2n}) =1$

7/Condition sur les complexes a,b,c pour que les racines de $x^3+ax^2+bx+c =0$ forment avec l'origine un carré ;les racines de $P=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ forment un carré ssi $c=a^3/16$ et $b=3a^2/8$

8/Conditions sur les complexes p,q pour que les racines de X^3+pX+q aient le même module ; ait une racine double

9/Calculer $\prod_{k=1}^{n} (a + be^{2ik\pi/n})$

10/Polynômes de Lagrange :

Soient $x_0,x_1,....,x_n$ n +1 complexes distincts on pose $L_k(x)= \prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne k}} \frac{x-x_i}{x_k - x_i}$

a)Préciser le degré, les racines de L_k et $L_k(x_m)$ selon m

b)Montrer que si d°P ≤ n $P(x)= \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k(x)$

c)Si les x_k sont les racines d'un polynôme T,d°T=n+1, exprimer les L_k en fonction

de $T(x)$ et $T'(x_k)$
d) si $P(i)=1/i$ pour $i \in \{1,2,..,n\}$ et $d°P< n$ calculer $P(n+1)$ (utiliser $Q(x) = x P(x) - 1$)

11/Si $P(X)=X^n + a_{n-1}X^{n-1}+...+a_o$ et si z est une racine complexe (ou réel)
alors a) $|z| \leq 1+\sum_0^{n-1}|a_i|$ b) amélioration : $|z| \leq 1 +M$ où $M=\max |a_m|$
(si $|z| \leq 1$ c'est vrai ; supposons $|z| > 1$ on a $|z^n| =| a_{n-1}z^{n-1}+...+a_o| \leq M (|z^{n-1}| +...+|z| +1$
soit $|z^n| \leq M (|z^n| -1) / (|z| -1)\leq M |z^n| / (|z| -1)$ d'où $|z| -1\leq M$ puisque $| z^n| >1 >0$)

12/Polynomes de Bernoulli
a)Soit A un polynôme montrer qu'il existe un unique polynome B tel que
$B' =A$ et $\int_0^1 B =0$
On définit la suite de polynômes (B_n) par $B_o=1$ pour $n \geq 1$
$B_n' = n B_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$ .On pose $b_n =B_n(0)$
b)Calculer B_1 , B_2
c)Déterminer le degré de B_n
d)Montrer que pour $n>1$ $B_n(1)=B_n(0)$
e)Montrer que $(-1)^n B_n(1-x) =B_n(x)$
Déduire que $b_{2n+1} = 0$ pour $n>0$
f)Montrer en utilisant la formule de Taylor que $B_n(x)= \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} x^k$
Déduire une formule de récurrence sur les b_n
g)Montrer par récurrence sur n que $B_n(x+1)-B_n(x) = n x^{n-1}$
Déduire une expression de $\sum_{k=1}^{m} k^n$ avec les polynômes de Bernoulli

13/Polynômes de Tchebicheff
a)Montrer qu'il existe un unique polynomeT_n tel que pour tout θ
$\cos(n\theta) =T_n(\cos(\theta))$
b)Montrer que $T_{n+1}(x) +T_{n-1}(x) =2xT_n(x)$
c)Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant
d)Montrer que $T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$ et que $T_n o T_m =T_{nm}$
e)Montrer que $(1-x^2) T_n''(x) -x T_n'(x) +n^2T_n(x) =0$
f)On pose $T_n(x)= \sum_{k=0}^{E(n/2)} a_k x^{n-2k}$ Trouver une récurrence entre a_k et a_{k-1}
et montrer que $a_k=\dfrac{(-1)^k 2^{n-2k-1} n C_{n-k}^k}{n - k}$
g)Montre qu'il existe un polynome U_n tel que $U_n(\cos(\theta)) =\sin(n\theta) /\sin(\theta)$
puis montrer que $U_n = T'_n / n$
14/ Résoudre $x+y+z=3$;$x^2+y^2 +z^2 =17$; $1/x+1/y+1/z =1/3$
15/factoriser x^8+x^4+1 ; X^5+32 ; X^5-1 calculer $\cos(2\pi/5)$

16/Montrer que $(X+1)^7 -X^7-1$ a deux racines réelles et aussi j ; factoriser le polynôme