MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

1/Matrice de la projection sur $x+y+z=0$ parallèlement à $x=y/2=z/3$

2/ C est un R-ev ; a,b deux complexes $f:z\in C\to az+b\bar{z}$

a)Ecrire la matrice de f dans la base (1,i)

b)Montrer f bijection ssi $|a|\neq|b|$

3/Matrice de $P\in R_n[X]\to(P(1)\ ;\ P'(1))\in RxR$ dans les bases canoniques;noyau,image

4/Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(R)$

a) Donner la matrice M de F: $X\in M_2(R)\to AX$ dans la base $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$

b)Montrer que F est bijective si et seulement si A est inversible et donner M^{-1}

trouver le noyau et l'image si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c)$G(X)=AX-XA$ noyau image si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Pour A quelconque calculer G^2 ,G^3

5/$F:P\in R_{n-1}[X]\to(P(a_1)\ ;P(a_2)\ ;\ldots\ ;P(a_n))$ où les a_i sont distincts

Ecrire la matrice M de F dans les bases canoniques et trouver le rang de M

6/$F:P\in R_n[X]\to XP'(X)+P(1)$

a)Ecrire la matrice A de F dans la base $B=(1,X,X^2,...,X^n)$

b)Ecrire la matrice A' de F dans la base $B'=(1,X-1,(X-1)^2,....,(X-1)^n)$

c)Déterminer le noyau ,le rang et l'image de F d)Calculer A^2

7/ $F:P\to\dfrac{\int_a^x P}{x-a}$ montrer que F est un endomorphisme de $R_n[X]$

Déterminer la matrice M de F dans la base $((x-a)^k)$;Montrer F bijective, trouver F^{-1}

8/a)Si p est un projecteur montrer que fop=pof si et seulement si Imp et Kerp sont stables par f soit $f(Imp)\subset Imp$ et $f(kerp)\subset kerp$

b)Déterminer les matrices carrées (n,n) qui commutent avec E_{11} et préciser la dimension de ce sous espace de $M_n(R)$

9/Montrer que $\{X\in M_n(R)\ |\ AX=0\}$ est un sous espace de $M_n(R)$ et déterminer sa dimension en fonction de rg(A)

10/F: $P\in R_n[X]\to(P(a)\ ,\ P'(a)\ ,P''(a)\ ,\ldots,P^{(n)}(a)\ )$ Matrice , bijectivité et F^{-1}

11/ F: $P\in R_n[X]\to(X-1)^2P''(X)\in R_n[X)$ matrice, noyau , image, rang,FoF

12/ Soit F : $P(X)\in R_n[X]\to$ le reste de la division de $X^nP(X)$ par $X^{n+1}-X$

a)Trouver le noyau de F

b)Trouver dim(ImF)

c)Trouver F(1), F(X), $F(X^k)$ pour $k\leq n$

d)Trouver une base de ImF

13/Déterminer rg(M) a)M=(exp(i+j)) b)M=(min(i,j)) c)(i+j)