ESPACE EUCLIDIEN

1 E espace euclidien ,$e_1,....,e_n$ sont des vecteurs normés de E tels que pour tout x

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x\ ;e_i\rangle^2$$ montrer que ($e_1,....,e_n$) est une base orthonormée

(sans condition c'est faux $e_1=(1,0)$, $e_2=e_3=(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dans R^2 usuel)

2a)Déterminer inf ($\int_0^{\pi}(a\cos(t)+b\sin(t)-t)^2\,dt$) pour (a,b) $\in R^2$

b) inf $\int_0^1 x\,(x^2-ax-b)^2\,dx = 1/600$ pour (a,b) $\in R^2$ c) inf $\int_0^1 (t\ln(t)-at-b)^2 dt$

d) inf $\int_0^1 (1+at+bt^2)^2\,dt$ (centrale 2008) e) soient (a_i)distincts, sur $E=R_n[X]$

$<P,Q>=\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$, trouver $d(X^n, F)$ où $F=\{P|\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k)=0\}$

3 a)p est un projecteur de E euclidien réel
Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall\ x \in E\quad \|p(x)\| \le \|x\|$ (un classique)
b)Si $p_1 = p_F$ et $p_2 = p_G$ des projections orthogonales et si $p_1 o\, p_2$ est une projection alors c'est une projection orthogonale et $p_F\, o p_G = p_{F\cap G}$
c) Si $p1op2=0$ montrer sans le b) $p2op1=0$

4 a)Matrice de la projection orthogonale sur F d'équations
$x+y+z+t=0$ et $x-y+z-t=0$ dans R^4 usuel
b) matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par (1,2,-1)
puis image du plan $3x-y+z=0$
c)Si F et G sont 2 sev orthogonaux montrer qu'il existe une sev H tel que $s_F\ o\ s_G = s_H$

5 $E=M_n(R)$ avec $<X;Y>=tr({}^tXY)$
a)Déterminer la projection orthogonale de la matrice X sur $F=\{X\in M_n(R)|\ Tr(X)=0\}$
b) distance entre I et les matrices antisymétriques ; entre E_{12} et les matrices symétriques

6 E euclidien , f endomorphisme tel que si $<x;y>=0$ alors $<f(x);f(y)>=0$ montrer qu'il existe $c \ge 0$ tel que pour tout (x,y) $<f(x);f(y)>=c<x;y>$

7 a) Soit $u\in End(E)$ symétrique soit tel que pour tout x,y $<u(x),y> = <x\ ;u(y)>$
alors $Ker(u) = Im\ u^{\perp}$
b)Montrer que $u(P)=(1-X^2)\,P''(X) - 2XP'(X)$ est symétrique avec $<P,Q>=\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

$\boxed{8}$ $(e_1 ;.. ;e_n)$ libre de E ssi la matrice $(<e_i ; e_k >)$ est inversible

$\boxed{9}$ A matrice carrée réelle montrer que $rg(A\,{}^tA)=rg({}^tAA)=rg(A)$

$\boxed{10}$ $E=R_2[X]$ et $<P ;Q> =P(0) Q(0) + P'(0) Q'(0) +P''(0)Q''(0)/4$
Projection orthogonale de $P=1+X^2$ sur $F= vect(1+X+X^2 , 1+2X+4X^2)$ et distance de P à F
(petite mines 2009)

$\boxed{11}$ Dans R[X] $< \sum a_i X^i ; \sum b_i X^i > = \sum a_i b_i$ montrer que si $H= \{P \in R[X] \ |P(1)=0\}$ alors $H^{\perp} =\{0\}$

$\boxed{12}$ F est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Trouver une base orthonormée de $F^{\perp}$ et la projection orthogonale de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F avec le produit scalaire usuel de $M_2(R)$

$\boxed{13}$ Soit 3 vecteurs x1,x2,x3 on note G(x1,x2,x3) =det(<xi,xj>) ,de même avec 2 vecteurs

a)Calculer G(x1,x2,x3) si x3 est orthogonale à x1 et x2
b)Calculer G si (x1,x2,x3) est liée
c)Montrer que $G(x1,x2,x3) = d(x3, Vect(x1,x2))^2 \, G(x1,x2)$

$\boxed{14}$ a)Montrer que pour tout n il existe $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P\in \mathbb{R}_n[X]$
$\int_0^1 A(x)P(x)\,dx =P(0)$
b)Montrer que la matrice (n,n) $A= (1/(i+j+1))$ vérifie ${}^tX\,AX >0$ pour tout vecteur colonne X non nul (utiliser $\int_0^1 x^i x^j\,dx$) déduire A inversible

$\boxed{15}$ Si les n+1 $(a_k)_{0\le k\le n}$ sont deux à deux distincts $<P,Q> = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on trouvera une base orthogonale
puis on cherchera la distance de X^n à $F=\{P \in \mathbb{R}_n[X] \ \big| \ \sum_{k=0}^{n} P(a_k)=0 \}$