DEVELOPPEMENTS LIMITES

1/en 0 a) DL3 $\ln(1+x) / \sqrt{1+x}$

b) DL3 Arctanx / (2+Ln(1+x))

c) DL2 x/ (e^x - 1)

d)DL2 sin(x)/arctg(x)

e)DL3 Arcsin(x/(1+x))

f) DL3 Arctan(x+e^x)

g) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ DL_3 en 0

2/Calculer les limites a) $(1/x^n) - (1/\sin^n x)$ en 0 n entier n>0

b) $(x^x-x)/(1-x+\ln x)$ en 1

c) $((a^x+b^x)/2)^{1/x}$ en 0

d)$(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ en $\pi/4$

e)$\dfrac{e^x - x^e}{(\ln(x) - \ln(e))^2}$ en e

f) $\dfrac{1}{x\operatorname{tg}x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ en 0

g)$\dfrac{1}{\operatorname{Arctg}x} - \dfrac{1}{\operatorname{Arc}\sin x}$ en 0

h) en 0 $\dfrac{1}{\ln(\cos x)} + \dfrac{2}{\sin^2 x}$

i)$(\ln x)^{\ln(e-x)}$ en e

j)Limite des suites : $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$; $(a^{1/n} + b^{1/n})^n$,

$u_n = (1+ in/(n^2-1))^n$ utiliser $a_n=\operatorname{arctg}(n/n^2-1)$

3/Prolonger en 0 et montrer que le prolongement est C^1 sur R

a) f(x)= (1/x) - cotgx

b) f(x) = x /(e^x-1)

c)f est C^2 f(0)=0 montrer que f(x)/sin(x) est prolongeable en une fonction C^1

4/Asymptote de a) $\sqrt{1+x+x^2}\ e^{1/x}$ b) (x+1) Arctgx c) $x^2 \ln(x/(1+x))$

5/a)Equivalent de f(x+1) -f(x) en +∞ avec f(x)= $\sqrt[4]{x}$, Ln(x) ,e^x et Arctan(x)

b)Equivalent de $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$ en 1 ,en +∞ ; de $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ en 0 , en+∞

c)equivalent en +∞ $(\ln(1+x)/\ln x)^x - 1$; en $\pi/4$ de ln(tgx)/cos(2x)

6/Equivalent des suites

a) $(1+\dfrac{a}{n})^n - e^a$ b) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ c) $((n-1)/(n+1))^{n^2}$

7/$f(x)= e^x + \sin x + x - 1$. Montrer que f est une bijection de R dans R ,$f(0)=0$
justifier l'existence et déterminer le DL_3 en 0 de f^{-1}

8/DL_n en 0 de $\ln(1+x+x^2)$

9/$f : [0;A] \to [0;A]$ C^0 continue sur [0;A] ,strictement croissante
et $f(x)< x$ pour $x > 0$ et ayant un DL en 0 $f(x)= x - a x^p + o(x^p)$ avec $a>0$
p entier $p>1$.On définit u_n par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_o \in]0;A]$
a)Montrer que $u_n >0$ et que $\lim u_n =0$
b)On pose $w_n= 1/ u_n^{p-1}$ Montrer que la suite ($w_{n+1} - w_n$) a une limite puis par Césaro déduire un équivalent de la suite (u_n)
c)Equivalent de u_n si $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=\sin x$ ou $f(x)=\text{Arctg}x$
d)$u_{n+1}= (1+u_n^2)/2$ avec $0<u_o <1$ Limite L de (u_n) et équivalent de (u_n-L)

10/ developpement asymptotique à l'ordre 2

a) $\sin(\frac{\pi n}{n+1})$ b)$\sin(\pi\sqrt{1+n^2})$ c) $\left(\frac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{n+\sqrt{n}}$

11/ $x+\ln(x)=n$ a une unique solution x_n montrer que
$x_n= n - \ln(n)+ \ln(n)/n + o(\ln n/n)$